

ФОРМУЛИ ЗА ЛИЦАТА НА НЯКОИ ВИДОВЕ МНОГОЪГЪЛНИЦИ И ПРИЛОЖЕНИЕТО ИМ ЗА ДОКАЗВАНЕ НА ЗАВИСИМОСТИ В ТЯХ

Проф. д.п.н. Йордан Табов¹⁾, гл. ас. д-р Асен Велчев²⁾,
гл. ас. д-р Станислав Стефанов³⁾, маг. мат. Ханм Ханмов⁴⁾

¹⁾Институт по математика и информатика на БАН – София

²⁾Технически университет – София

³⁾Университет по архитектура, строителство и геодезия – София

⁴⁾Варна, ул. „Братя Шкорпил“ 16

Резюме. В тази публикация една новооткрита формула за лице на четириъгълник се прилага за извеждането на формули за лицата на някои видове многоъгълници с произволен брой страни. С помощта на тези формули се доказват някои зависимости в такива многоъгълници при конкретен брой техни страни.

Ключови думи: четириъгълник; многоъгълник; лице; формула; зависимости

1. Въведение

Неотдавна бяха открити две нови формули за лице на четириъгълник и формули за лицата на определен вид многоъгълници, наречени диагонално равноъгълни от първи тип (Naimov 2021, Naimov 2022). Формулите за лице на четириъгълник бяха използвани за доказването на ред интересни неравенства в него, както и за извеждането на една важна зависимост между дължините на страните и диагоналите му (Naimov 2021). Освен това в четириъгълник и многоъгълник с по-голям брой страни бяха заимствани и пренесени от триъгълника косинусовата и т.нар. котангенсова теорема.

С помощта на получената котангенсова теорема за многоъгълник бяха изведени формулите за лицата на споменатите по-горе диагонално равноъгълни многоъгълници от първи тип (Naimov 2022). В тази публикация ще приложим една от новооткритите формули за лице на четириъгълник за извеждането на формули за лицата на друг вид многоъгълници, наречени диагонално равноъгълни многоъгълници от втори тип. С помощта на така получените формули ще изведем някои зависимости в равноъгълни многоъгълници с конкретен брой страни. Предварително ще приведем новите формули за лице на четириъгълник и форму-

лите за лицата на диагонално равноъгълните многоъгълници от първи тип, изведени в (Haimov 2022), които ще използваме тук.

2. Формули за лице на четириъгълник и равноъгълни многоъгълници от първи тип

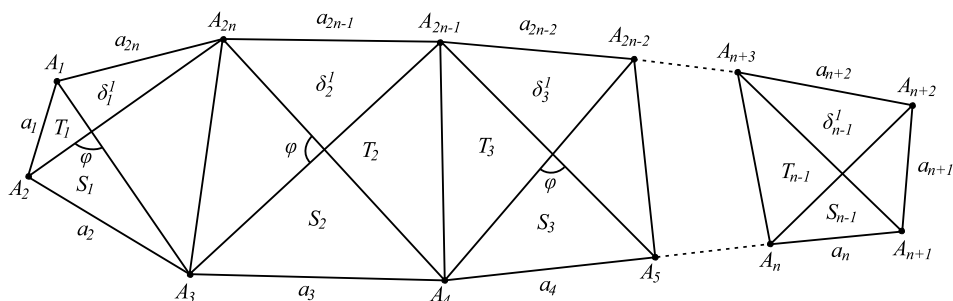
Въпросните формули за лице на четириъгълник са следните:

$$(1) \quad S = \frac{1}{4}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2) \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ,$$

$$(2) \quad S = \frac{1}{4} \sqrt{4m^2 n^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}.$$

Тук a, b, c и d са дължините на последователните страни на четириъгълника, φ е ъгълът между диагоналите, който лежи срещу страните с дължини a и c , а m и n са дължините на диагоналите.

Сега ще приведем определението за диагонално равноъгълни многоъгълници от първи тип, дадено в (Haimov 2022). За многоъгълници с четен и нечетен брой страни, то е различно.



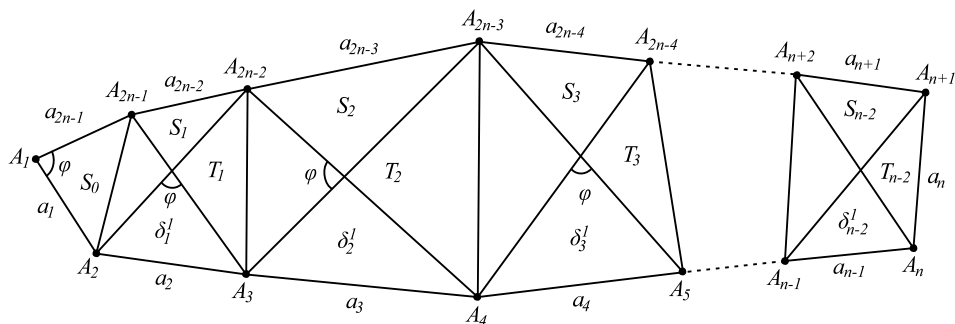
Фигура 1

Нека $A_1A_2 \dots A_{2n}$ е произволен $2n$ -ъгълник (фиг. 1). На страната му A_1A_2 да съпоставим редицата от $n-1$ четириъгълника: $A_1A_2A_3A_{2n}$, $A_3A_4A_{2n-1}A_{2n}$, ..., $A_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$, която се получава, като се построят диагоналите A_3A_{2n} , A_4A_{2n-1} , ..., A_nA_{n+3} на многоъгълника, краищата на всеки от които се намират през равен брой върхове спрямо краищата на страната A_1A_2 . Ще бележим тази редица с δ_1^1 , δ_2^1 , ..., δ_{n-1}^1 и ще я наричаме редица от четириъгълници, съответна на страната A_1A_2 .

Определение 1. Нека $A_1A_2 \dots A_{2n}$ е произволен $2n$ -ъгълник (фиг. 1). Разглеждаме редицата от четириъгълници, съответна на страната му A_1A_2 : $A_2A_3A_{2n}A_1$, $A_3A_4A_{2n-1}A_{2n}$, ..., $A_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$. Означаваме пресечни-

те точки на диагоналите на четириъгълниците от тази редица съответно с: $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$. Нека ъглите между диагоналите на всички четириъгълници от редицата имат една и съща мярка φ , като в първия четириъгълник $A_2A_3A_{2n}A_1$ това е ъгълът $\angle A_2T_1A_3$ срещу страна на многоъгълника, във втория – ъгълът $\angle A_3T_2A_{2n}$ срещу диагонал на многоъгълника, в третия – ъгъл $\angle A_4T_3A_5$, отново срещу страна на многоъгълника, в четвъртия – ъгъл, отново срещу диагонал на многоъгълника, и т.н. Ще казваме, че този $2n$ -ъгълник е диагонално равноъгълен от първи тип по отношение на страната си A_1A_2 с константен ъгъл φ .

Да разгледаме сега произволен многоъгълник $A_1A_2 \dots A_{2n-1}$ с нечетен брой страни (фиг. 2). Нека $A_2A_3 \dots A_nA_{n+1} \dots A_{2n-2}A_{2n-1}$ е $2n$ -ъгълникът от върховете му без върха A_1 . Редицата $\delta_1^1, \delta_2^1, \dots, \delta_{n-2}^1$ от четириъгълници, съответна на страната му A_nA_{n-} , ще наричаме редица, съответна на върха A_1 на многоъгълника $A_1A_2 \dots A_{2n-1}$.



Фигура 2

Определение 2. Нека $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{2n-1}$ е произволен $2n-1$ -ъгълник (фиг. 2). Разглеждаме редицата от четириъгълници, съответна на върха му A_1 : $A_2A_3A_{2n-2}A_{2n-1}$, $A_3A_4A_{2n-3}A_{2n-2}$, $\dots$, $A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{n+2}$. Означаваме пресечните точки на диагоналите на тези четириъгълници съответно с: $T_1, T_2, \dots, T_{n-2}$. Нека ъглите между диагоналите на всички четириъгълници от редицата $\delta_1^1, \delta_2^1, \dots, \delta_{n-2}^1$ имат една и съща мярка φ , като в първия четириъгълник $A_2A_3A_{2n-2}A_{2n-1}$ това е ъгълът $\angle A_2T_1A_3$ срещу страна на многоъгълника, във втория – $A_3A_4A_{2n-3}A_{2n-2}$ – ъгълът $\angle A_3T_2A_{2n-2}$ срещу диагонал на многоъгълника, в третия четириъгълник $A_4A_5A_{2n-4}A_{2n-3}$ – ъгълът $\angle A_4T_3A_5$, отново срещу страна на многоъгълника, в четвъртия – ъгъл, отново срещу диагонал на многоъгълника и т.н. Нека освен

това и $\angle A_2 A_1 A_{2n-1}$ има мярка φ . Ще казваме тогава, че $2n-1$ -ъгълникът $A_1 A_2 \dots A_{2n-1}$ е диагонално равноъгълен от първи тип по отношение на върха си A_1 , с константен ъгъл φ .

В (Haimov 2022) изведохме следните формули за лицата на диагонално равноъгълните многоъгълници от първи тип, съответно с четен и нечетен брой страни.

Теорема 1. Лицето S на диагонално равноъгълния от първи тип, по отношение на страната си $A_1 A_2$ многоъгълник $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ с константен ъгъл φ , $\varphi \neq 90^\circ$, се изразява чрез дължините $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ на страните му $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{2n} A_1$ и тангенса на ъгъл φ , по формулата (фиг. 1):

$$(3) \quad S = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (a_{2k-1}^2 - a_{2k}^2) \operatorname{tg} \varphi.$$

Теорема 2. Лицето S на диагонално равноъгълния от първи тип, по отношение на върха си A_1 многоъгълник $A_1 A_2 \dots A_{2n-1}$ с константен ъгъл φ , $\varphi \neq 90^\circ$, се изразява чрез дължините $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$, съответно на страните му $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{2n-1} A_1$ и тангенса на ъгъл φ по формулата (фиг. 2):

$$(4) \quad S = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n a_{2k-1}^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k}^2 \right) \operatorname{tg} \varphi.$$

В изложението по-нататък ще използваме и следната формула за лице на триъгълник, следваща непосредствено от котангенсовата теорема (Haimov 2022):

$$(5) \quad S = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 - c^2) \operatorname{tg} \gamma, \quad \gamma \neq 90^\circ,$$

при стандартните означения в триъгълника.

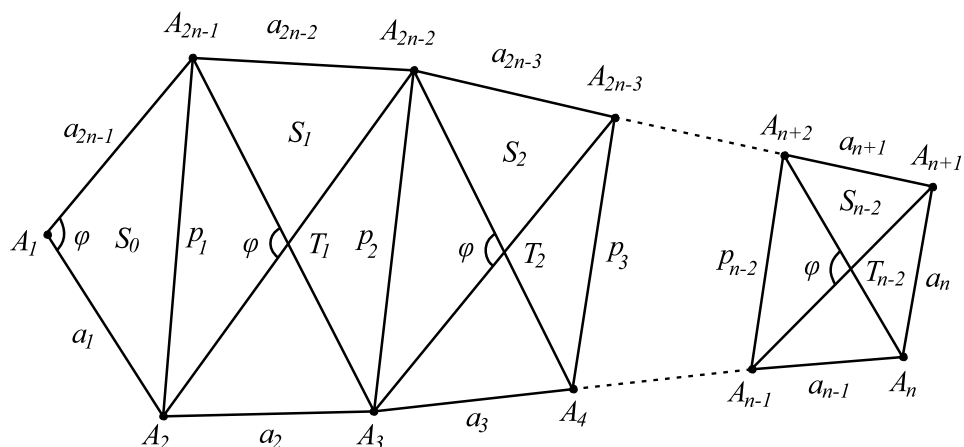
3. Формули за лицата на диагонално равноъгълни многоъгълници от втори тип

Определение 3. Нека $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n A_{n+1} A_{2n-1}$ е изпъкнал $2n-1$ -ъгълник и редицата от четириъгълници, съответна на върха му A_1 е: $A_2 A_3 A_{2n-2} A_{2n-1}$, $A_3 A_4 A_{2n-3} A_{2n-2}, \dots, A_{n-1} A_n A_{n+1} A_{n+2}$ (фиг. 3). Нека още във всеки четириъгълник от тази редица, например $A_2 A_3 A_{2n-2} A_{2n-1}$, ъгълът между диагоналите, който лежи срещу страна на четириъгълника, явяваща се диагонал на многоъгълника – в случая ъгъл $A_2 T_1 A_{2n-1}$, има мярка φ . Нека освен това и ъгъл $A_2 A_1 A_{2n-1}$ има мярка φ . Ще казваме тогава, че многоъгълникът

е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на върха си A_1 , с константен ъгъл φ .

Теорема 3. Нека $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{2n-1}$ е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на върха си A_1 многоъгълник, с константен ъгъл φ , $\varphi \neq 90^\circ$ (фиг. 3). Нека още дължините на страните му $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2n-1}A_1$ са съответно $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$, а дължините на диагоналите му $A_2A_{2n-1}, A_3A_{2n-2}, \dots, A_{n-1}A_{n+2}$ са респективно: $p_1, p_2, \dots, p_{n-2}$. Тогава лицето S на многоъгълника се определя по формулата:

$$(6) \quad S = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - a_n^2 + \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-2} p_k^2 \right) tg \varphi.$$



Фигура 3

Доказателство. Означаваме лицето на $\Delta A_1A_2A_{2n-1}$ с S_0 , а лицата на последователните четириъгълници от редицата, съответна на върха A_1 – с S_1, S_2, S_{n-2} . По цитираните в началото формули (5) и (1) за лице на триъгълник и четириъгълник, от $\Delta A_1A_2A_{2n-1}$ и последователните четириъгълници от редицата, имаме съответно:

$$S_0 = \frac{1}{4} (a_1^2 + a_{2n-1}^2 - p_1^2) tg \varphi,$$

$$S_1 = \frac{1}{4} (a_2^2 + a_{2n-2}^2 - p_1^2 - p_2^2) tg \varphi,$$

$$S_2 = \frac{1}{4}(a_3^2 + a_{2n-3}^2 - p_2^2 - p_3^2) \operatorname{tg} \varphi,$$

$$S_{n-2} = \frac{1}{4}(a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2 - a_n^2 - p_{n-2}^2) \operatorname{tg} \varphi.$$

Събираме почленно тези равенства и получаваме:

$$S = \frac{1}{4}[(a_1^2 + a_{2n-1}^2) + (a_2^2 + a_{2n-2}^2) + (a_3^2 + a_{2n-3}^2) + \dots + (a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2) - a_n^2 - 2p_1^2 - 2p_2^2 - \dots - 2p_{n-2}^2] \operatorname{tg} \varphi,$$

или след прегрупиране:

$$S = \frac{1}{4}[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{n-1}^2) - a_n^2 + (a_{n+1}^2 + \dots + a_{2n-1}^2) - 2p_1^2 - 2p_2^2 - \dots - 2p_{n-2}^2] \operatorname{tg} \varphi,$$

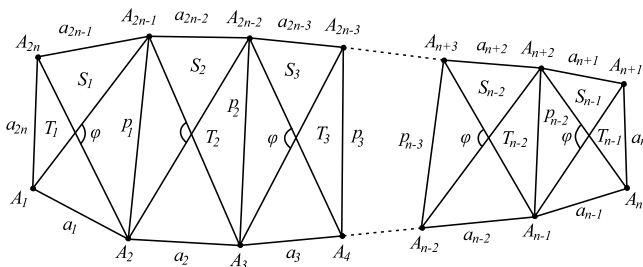
което след въвеждане на знака за сума води до равенството:

$$S = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - a_n^2 + \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-2} p_k^2 \right) \operatorname{tg} \varphi.$$

Така доказахме желаната формула (6).

Сега ще изведем формула за лицето на диагонално равноъгълен многоъгълник от втори тип с четен брой страни.

Определение 4. Нека $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n A_{n+1} A_{2n}$ е изпъкнал $2n$ -ъгълник и редицата от четириъгълници, съответна на страната му $A_1 A_{2n}$, е: $A_1 A_2 A_{2n-1} A_{2n}$, $A_2 A_3 A_{2n-2} A_{2n-1}$, ..., $A_{n-1} A_n A_{n+1} A_{n+2}$ (фиг. 4). Нека във всеки четириъгълник от тази редица, например в първия четириъгълник $A_1 A_2 A_{2n-1} A_{2n}$, ъгълът между диагоналите, който лежи срещу страна на четириъгълника, явяваща се диагонал на многоъгълника – в случая $\angle A_2 T_1 A_{2n-1}$, има мярка φ . Ще казваме тогава, че многоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на страната си $A_1 A_{2n}$, с константен ъгъл φ .



Фигура 4

Теорема 4. Нека $A_1A_2...A_{n-1}A_nA_{n+1}...A_{2n}$ е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на страната си A_1A_{2n} многоъгълник, с константен ъгъл φ , $\varphi \neq 90^\circ$ (фиг. 4). Нека още дължините на страните му $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{2n}A_1$ са съответно $a_1, a_2, ..., a_{2n}$, а дължините на диагоналите му $A_2A_{n-1}, A_3A_{2n-2}, ..., A_{n-1}A_{n+2}$ – съответно: $p_1, p_2, ..., p_{n-2}$. Лицето S на многоъгълника се определя по формулата:

$$(7) \quad S = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - a_n^2 + \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k^2 - a_{2n}^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-2} p_k^2 \right) \operatorname{tg} \varphi.$$

Доказателство. Означаваме лицата на четириъгълниците от редицата, съответна на страната A_1A_{2n} , респективно с: $S_1, S_2, ..., S_{n-1}$. По цитираната в началото формула (1) за лице на четириъгълник имаме последователно (фиг. 4):

$$S_1 = \frac{1}{4} (a_1^2 + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 - p_1^2) \operatorname{tg} \varphi,$$

$$S_2 = \frac{1}{4} (a_2^2 + a_{2n-2}^2 - p_1^2 - p_2^2) \operatorname{tg} \varphi,$$

$$S_3 = \frac{1}{4} (a_3^2 + a_{2n-3}^2 - p_2^2 - p_3^2) \operatorname{tg} \varphi,$$

.....
.....

$$S_{n-2} = \frac{1}{4} (a_{n-2}^2 + a_{n+2}^2 - p_{n-3}^2 - p_{n-2}^2) \operatorname{tg} \varphi,$$

$$S_{n-1} = \frac{1}{4} (a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2 - p_{n-2}^2 - a_n^2) \operatorname{tg} \varphi.$$

Събираме почленно тези равенства и получаваме:

$$S = \frac{1}{4} \left[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2) - a_n^2 + (a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + ... + a_{2n-1}^2) - a_{2n}^2 - 2p_1^2 - 2p_2^2 - ... - 2p_{n-2}^2 \right] \operatorname{tg} \varphi,$$

или като въведем знак за сума:

$$S = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - a_n^2 + \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k^2 - a_{2n}^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-2} p_k^2 \right) \operatorname{tg} \varphi.$$

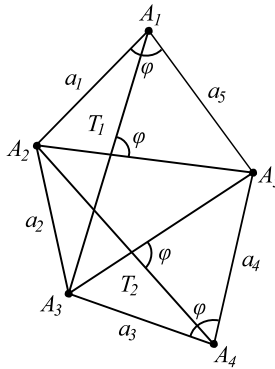
Така доказахме желаната формула (7).

4. Приложение на формулите за лице на диагонално равноъгълни многоъгълници с конкретен брой страни за доказването на зависимости в тях

С помощта на формулите за лице на равноъгълни многоъгълници се доказват различни зависимости в тях. Такива зависимости съществуват в многоъгълници с произволен брой страни, които са равноъгълни по отношение на два или повече свои върха (респективно по отношение на две или повече свои страни), с един и същ константен ъгъл φ . За да избегнем обаче сложни чертежи, ще се ограничим с извеждането на тези зависимости в диагонално равноъгълни многоъгълници с конкретен брой страни.

Ще разгледаме първо два примера на петоъгълници, които се оказват диагонално равноъгълни по отношение на два свои върха, с един и същ константен ъгъл φ :

Пример 1. Нека $A_1A_2 \dots A_5$ е петоъгълник с дължини на страните си A_1A_2 , $A_2A_3, \dots, A_5A_1$ съответно $a_1, a_2, \dots, a_5$ (фиг. 5). Нека още диагоналите му A_2A_5 и A_1A_3 се пресичат в точка T_1 , а диагоналите му A_3A_5 и A_2A_4 – съответно в точка T_2 . Ако ъглите $\angle A_2A_1A_5$, $\angle A_1T_1A_5$, $\angle A_3A_4A_5$ и $\angle A_4T_2A_5$ са равни на φ , където $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството $a_4 = a_5$.



Фигура 5

Доказателство. Означаваме лицето на петоъгълника с S . От условието следва, че той е диагонално равноъгълен от първи тип по отношение на върха си A_1 , с константен ъгъл φ . Наистина, редицата, съответна на върха му A_1 , се състои от един четириъгълник $A_2A_3A_4A_5$ и ъгълът между диагоналите на последния, който лежи срещу страна на петоъгълника, има мярка φ . Освен това и $\angle A_2T_1A_5 = \varphi$. От определение 2 следва, че петоъгълникът $A_1A_2A_3A_4A_5$ е диагонално равноъгълен от първи тип по отношение на върха си A_1 . По теорема 2 можем да заключим, че лицето му S се определя по формулата:

$$S = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^3 a_{2k-1}^2 - \sum_{k=1}^2 a_{2k}^2 \right) \operatorname{tg} \varphi,$$

или след освобождаване от знака за сума:

$$S = \frac{1}{4} (a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 - a_2^2 - a_4^2) \operatorname{tg} \varphi.$$

Аналогично от условието следва, че петоъгълникът е диагонално равноъгълен от първи тип и по отношение на върха си A_4 , с константен ъгъл φ , откъдето по същия начин получаваме равенството:

$$S = \frac{1}{4} (a_3^2 + a_4^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_5^2) \operatorname{tg} \varphi.$$

От последните две равенства (предвид условието $\varphi \neq 90^\circ$) следва, че:

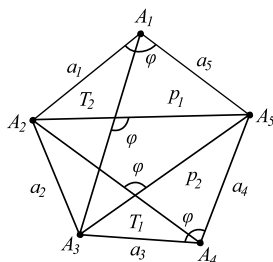
$$a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 - a_2^2 - a_4^2 = a_3^2 + a_4^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_5^2,$$

или след унищожаване на еднаквите членове, че: $a_4 = a_5$.

Забележка. Петоъгълници, отговарящи на условията от примера, съществуват. Такъв петоъгълник може да се построи (например) така: построяваме произволен $\triangle A_1 A_2 A_5$, в който $\angle A_2 A_1 A_5 = \varphi < 90^\circ$. Върху страната му $A_2 A_5$ вземаме точка T_1 така, че $\angle A_1 T_1 A_5 = \varphi$. Построяваме произволна точка T_2 , от която отсечката $A_2 A_5$ се вижда под ъгъл $180^\circ - \varphi$, и нека $A_1 T_1 \cap A_5 T_2 = A_3$. Върху продължението на $A_2 T_2$ намираме точката A_4 , от която отсечката $A_3 A_5$ се вижда под ъгъл φ . Тогава $\angle A_2 A_1 A_5 = \angle A_5 T_1 A_1 = \angle A_4 T_2 A_5 = \angle A_3 A_4 A_5 = \varphi$.

Пример 2. Нека $A_1 A_2 \dots A_5$ е петоъгълник с дължини на страните си $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., $A_5 A_1$ съответно a_1 , $a_2, \dots, a_5$ и дължини на диагоналите си $A_2 A_5$ и $A_3 A_5$ съответно p_1 и p_2 . Означаваме пресечната точка на диагоналите $A_2 A_4$ и $A_3 A_5$ с T_1 (фиг. 6), а тази на диагоналите $A_2 A_5$ и $A_1 A_3$ – с T_2 . Ако ъглите $\angle A_2 T_1 A_5$, $\angle A_3 T_2 A_5$, $\angle A_3 A_4 A_5$ и $\angle A_2 A_1 A_5$ имат една и съща мярка φ , $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството:

$$(8) \quad a_3^2 - a_1^2 = p_2^2 - p_1^2.$$



Фигура 6

Доказателство. Означаваме лицето на петоъгълника с S . Лесно се провежда, че той е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на върха си A_1 , с константен ъгъл φ . Наистина, редицата, съответна на върха му A_1 , се състои от четириъгълника $A_2A_3A_4A_5$, в който ъгълът между диагоналите, лежащ срещу диагонал на петоъгълника, има мярка φ и освен това $\angle A_2A_1A_5 = \varphi$. Затова по определение 2 петоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на върха си A_1 . По теорема 4 можем да заключим, че лицето му S се определя по формулата:

$$S = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^2 a_k^2 - a_3^2 + \sum_{k=4}^5 a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^1 p_k^2 \right) \operatorname{tg} \varphi,$$

която се записва и така:

$$S = \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3^2 - 2p_1^2) \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ.$$

Аналогично се доказва, че петоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип и по отношение на върха си A_4 , откъдето получаваме равенството:

$$S = \frac{1}{4} (a_3^2 + a_4^2 + a_2^2 + a_5^2 - a_1^2 - 2p_2^2) \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ.$$

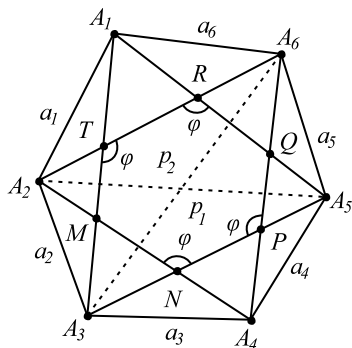
Като приравним десните части на последните две равенства и опростим, стигаме до доказваното равенство (8).

Забележка. Построяването на петоъгълник, отговарящ на условията от примера, можем да извършим (например) така: построяваме $\Delta A_2A_5A_1$ с ъгъл $A_2A_1A_5 = \varphi$. Върху страната му A_2A_5 избираме точката T_2 така, че да е изпълнено: $\angle A_2T_2A_1 = \varphi$. Построяваме произволна точка T_1 , от която отсечката A_2A_5 се вижда под ъгъл φ . Нека $A_3 = A_1T_2 \cap A_5T_1$. Върху продължението на отсечката A_2T_1 намираме точката A_4 , за която $\angle A_3A_4A_5 = \varphi$. Получаваме петоъгълник, в който всички ъгли от условието имат мярка φ .

Ще разгледаме сега и два примера на шестоъгълници, които се оказват диагонално равноъгълни по отношение на две свои страни, с един и същ константен ъгъл φ .

Пример 3. Нека $A_1A_2 \dots A_6$ е шестоъгълник с дължини на страните си A_1A_2 , A_2A_3 , ..., A_6A_1 съответно a_1 , a_2 , ..., a_6 и дължини на диагоналите си A_2A_5 и A_3A_6 – съответно p_1 и p_2 . Нека последователните диагонали A_1A_3 , A_2A_4 , A_3A_5 , ..., A_6A_2 се пресичат съответно в точките M , N , P , Q , R и T (фиг. 7). Ако ъглите $\angle TRQ$, $\angle MNP$, $\angle MTR$ и $\angle NPQ$ имат една и съща мярка φ , $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството:

$$(9) \quad a_6^2 + p_1^2 + a_3^2 = a_1^2 + p_2^2 + a_4^2$$



Фигура 7

Доказателство. Означаваме лицето на шестоъгълника с S . Лесно се проверява, че той е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на страната си A_1A_6 , с константен ъгъл φ . Наистина, редицата, съответна на страната му A_1A_6 , се състои от два четириъгълника $A_1A_2A_5A_6$ и $A_2A_3A_4A_5$. Във всеки от тях ъгълът между диагоналите, който лежи срещу диагонал на шестоъгълника, има мярка φ . Затова по определение 4 шестоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип по отношение на страната си A_1A_6 . По теорема 4 можем да заключим, че лицето му S се изразява по формулата:

$$S = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^2 a_k^2 - a_3^2 + \sum_{k=4}^5 a_k^2 - a_6^2 - 2 \sum_{k=1}^1 p_k^2 \right) \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ,$$

или като се освободим от знака за сума:

$$S = \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 - 2p_1^2) \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ.$$

Аналогично, понеже шестоъгълникът е диагонално равноъгълен от втори тип и по отношение на страната си A_2A_1 , с константен ъгъл φ , се получава равенството:

$$S = \frac{1}{4} (a_2^2 + a_6^2 - a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 - a_4^2 - 2p_2^2) \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ.$$

Като приравним десните части на последните две равенства и опростим, непосредствено получаваме доказваното равенство (9).

Забележка. Пример на шестоъгълник, за който са изпълнени условията от разгледания пример, е правилният шестоъгълник.

По аналогичен начин се разглежда и следният:

Пример 4. Нека $A_1A_2 \dots A_6$ е шестоъгълник с дължини на страните си A_1A_2 , A_2A_3 , ..., A_6A_1 съответно a_1 , a_2 , ..., a_6 . Означаваме $A_1A_3 \cap A_2A_6 = T_1$,

$A_3A_5 \cap A_4A_6 = T_2$, $A_2A_6 \cap A_1A_5 = T_3$ и $A_2A_4 \cap A_3A_5 = T_4$. Ако ъглите $\angle A_2T_1A_3$, $\angle A_3T_2A_6$, $\angle A_2T_3A_1$ и $\angle A_2A_4A_5$ имат една и съща мярка φ , $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството:

$$a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 = a_2^2 + a_4^2 + a_6^2.$$

Доказателството тук предоставяме на читателите.

В заключение привеждаме два примера за приложението на формула (1) за лице на четириъгълник, за извеждането на зависимости в други видове многоъгълници.

Пример 5. Нека $ABCDE$ е изпъкнал петоъгълник с дължини на страните си AB, BC, CD, DE и EA , съответно a, b, c, d и e , и дължини на диагоналите BE и CE , съответно m и n . Нека още средата на страната BC е F и $AF \cap BE = T_1$, $DF \cap CE = T_2$. Ако ъглите $\angle ET_1F$, $\angle ET_2F$, $\angle BAE$ и $\angle CDE$ имат една и съща мярка φ , $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството:

$$m^2 - n^2 = 2(a^2 - c^2).$$

Пример 6. Нека $A_1A_2 \dots A_5$ е изпъкнал петоъгълник с дължини на страните $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_1$, съответно $a_1, a_2, \dots, a_5$ и дължини на диагоналите A_2A_5 и A_3A_4 , съответно m и n . Нека още $A_1A_3 \cap A_2A_5 = T_1$ и $A_2A_4 \cap A_5A_3 = T_2$. Ако ъглите $\angle A_1A_5A_2$, $\angle A_3A_5A_4$, $\angle A_2T_1A_3$ и $\angle A_2T_2A_3$ имат една и съща мярка φ , $\varphi \neq 90^\circ$, то е изпълнено равенството:

$$a_1^2 + a_4^2 + n^2 = a_3^2 + a_5^2 + m^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

- ХАИМОВ, Х., 2021. Една кратка формула за лице на четириъгълник и нейното приложение, *Математика плюс*, 4, 68 – 77. ISSN 0861-8321.
- ХАИМОВ, Х., 2022. Косинусова и котангенсова тереми за четириъгълник и многоъгълник. Обобщение на една теорема на Карно. *Математика плюс*, 1, 52 – 64. ISSN 0861-8321.

REFERENCES

- HAIMOV, H., 2021. A short formula for the area of a quadrilateral and its application, *Mathematics plus*, 4, 68 – 77. ISSN 0861-8321.
- HAIMOV, H., 2022. Cosine and cotangent theorems for quadrilateral and polygon. Generalization of a Carnot theorem. *Mathematics plus*, 1, 52 – 64, ISSN 0861-8321

FORMULAE FOR THE AREAS OF SOME KINDS OF POLYGONS AND ITS APPLICATION IN PROVING RELATIONS IN THEM

Abstract. A new formula for the area of an arbitrary quadrilateral is applied to derive formulae for the areas of some kinds of polygons with any number of sides; these formulae are further applied to find specific relationships for concrete number of sides.

Keywords: quadrilateral; polygon; area; formula; relationship

✉ **Prof. DSc. Jordan Tabov**

ORCID iD: 0000-0001-5436-5134

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Sofia, Bulgaria

E-mail: tabov@math.bas.bg

✉ **Dr. Asen Velchev, Assist. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-6653-465X

Technical University of Sofia

Sofia, Bulgaria

E-mail: asen_v@abv.bg

✉ **Dr. Stanislav Stefanov, Assist. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-8254-1075

University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy

Sofia, Bulgaria

E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Haim Haimov, MSc math.**

ORCID iD: 0000-0002-0914-1059

16, Bratya Shkorpil Str.

Varna, Bulgaria