

Тема 1. Ролите на една забележителна точка в различни триъгълници

Да разгледаме следните две теореми:

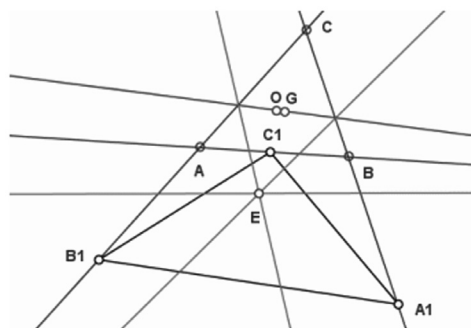
Теорема А1. (Паскалев, 2001, стр. 278). Ортоцентърът на $\triangle ABC$ е център на вписаната в $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност, където AA_1 , BB_1 и CC_1 са височините на $\triangle ABC$.

Теорема А2. (Гроздев & Ненков, 2012). Точката на Лемоан на $\triangle ABC$ е точка на Лемоан и на инволюционния триъгълник на $\triangle ABC$.

Общото между двете теореми е това, че една забележителна точка в $\triangle ABC$, в друг триъгълник, който е произведен на $\triangle ABC$, е също забележителна, но от друг вид. В литературата има много теореми, подобни на горните две. Ще казваме, че в двата триъгълника точката има различни *роли*. Може да се отбележи, че в енциклопедията на „Откривател“ (CGEEG, 2013) би трябвало да бъдат включени роли на не по-малко от пет хиляди забележителни точки, за да може да бъдат покрити известните източници на теореми за роли на забележителни точки в триъгълници. Една забележителна точка може да има различни роли и в един и същи триъгълник. Това обаче е тема, която ще бъде разглеждана в друга статия. Теореми А1 и А2, формулирани по-горе, са преоткрити от „Откривател“. По-долу са дадени и други примери. Теоремите са преформулирани като задачи за доказателство, а първите две теореми са преформулирани и като задачи за построение.

Теорема 1. The Circumcenter is the Orthocenter of the Cevian Triangle of the Euler Reflection Point.

Задача 1. Да означим с G и O съответно медицентъра и центъра на описаната окръжност за $\triangle ABC$. Докажете, че симетричните образи на правата GO относно правите BC , CA и AB се пресичат в една точка. Нека E е пресечната точка на трите прави, а A_1 е пресечната точка на правите AE и BC . Аналогично дефинираме точките B_1 и C_1 . Докажете, че центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е ортоцентър за $\triangle A_1B_1C_1$ (Фиг.1).



Фиг. 1

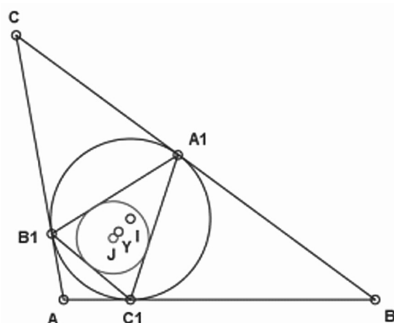
Точката E , определена в условието на задача 1, се нарича Euler Reflection Point. За този точка виж например Pohoata³ (2010). Кимбърлин (Kimberling⁴) нарича тази точка Focus of the Kiepert Parabola.

Задача 1а. Да се построи с линейка и пергел ортоцентърът на $\triangle A_1B_1C_1$, определен в условието на задача 1.

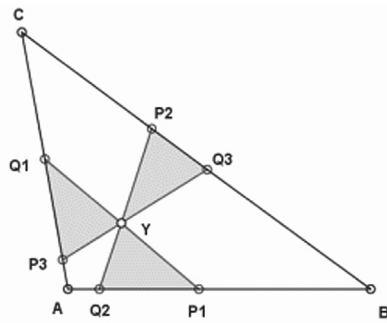
Задачата може да се реши с малък брой построения, като използваме теорема 1 и построим търсената точка като център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Теорема 2. The Yff Center of Congruence is the Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle wrt the Pedal Triangle of the Incenter.

Задача 2. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, а A_1 , B_1 и C_1 са допирните точки на вписаната окръжност съответно със страните BC , CA и AB . Нека Y е вътрешният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжности за $\triangle A_1B_1C_1$ (Фиг. 2.). Нека правата L_A преминава през точка Y и е перпендикулярна на вътрешната ъглополовяща на $\angle A$ на $\triangle ABC$, като P_1 и Q_2 са пресечните точки на L_A съответно със страните AB и AC . Аналогично определяме точките P_2 и Q_2 и точките P_3 и Q_3 (Фиг.3.). Докажете, че триъгълниците YP_2Q_3 , Q_1YP_3 и P_1Q_2Y са еднакви.



Фиг. 2

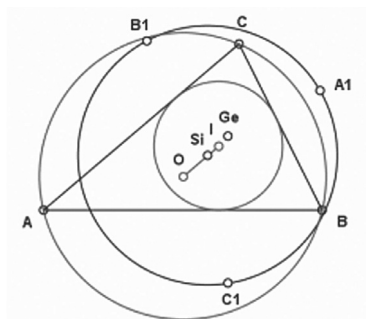


Фиг. 3

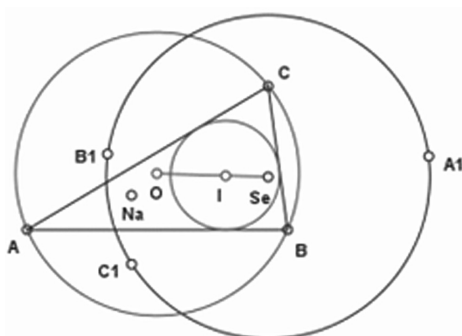
Задача 2а. В означенията на задача 2 определяме точка Y така, че триъгълниците YP_2Q_3 , Q_1YP_3 и P_1Q_2Y са еднакви. Да се построи с линейка и пергел точката Y .

Точката Y в горната задача може да бъде построена, като се използва теорема 2. Тази точка се нарича Yff Center of Congruence и е дефинирана през 1987 г. от холандския математик Peter Yff. В последните години задачата за построяване с линейка и пергел на точката Y привлича вниманието на изследователите. На нея е посветена статия в Wikipedia⁵ – Yff Center of Congruence. Може да се отбележи, че в тази статия се цитират резултати по темата, получени през 2007 г. от прототипа на „Откривател“ (JCGM⁶, 2007, Yff Center of Congruence). Отбелязано е, че прототипът на „Откривател“ „has generated several interesting results“. По този начин резултати на прототипа на „Откривател“ вече са влезли в Уикипедия.

Теорема 3. The Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle is the Circumcenter of the Triangle of Reflections of the Gergonne Point in the Sidelines of Triangle ABC.



Фиг. 4



Фиг. 5

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ и нека Pa , Pb и Pc са допирните точки на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и съответно със страните BC , CA и AB . Докажете, че правите APa , BPb и CPc се пресичат в една точка. Да означим пресечната точка с Ge . Нека A_1 , B_1 и C_1 са симетричните точки на Ge относно правите BC , CA и AB . Означаваме със Si центъра на окръжността през точките A_1 , B_1 и C_1 . Докажете, че Si е вътрешният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност на $\triangle ABC$ (Фиг.4).

Теорема 4 по-долу е аналогична на теорема 3.

Теорема 4. The External Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle is the Circumcenter of the Triangle of Reflections of the Nagel Point in the Sidelines of Triangle ABC.

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$ и нека Pa е допирната точки на страната BC и външновписаната за $\triangle ABC$ окръжност, лежаща срещу $\angle A$. Аналогично определяме точките Pb и Pc . Докажете, че правите APa , BPb и CPc се пресичат в една точка. Да означим пресечната точка с Na . Нека A_1 , B_1 и C_1 са симетричните точки на Na относно правите BC , CA и AB . Означаваме със Se центъра на окръжността през точките A_1 , B_1 и C_1 . Докажете, че Se е външният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност за $\triangle ABC$ (Фиг.5).

Тема 2. Центрове на перспектива

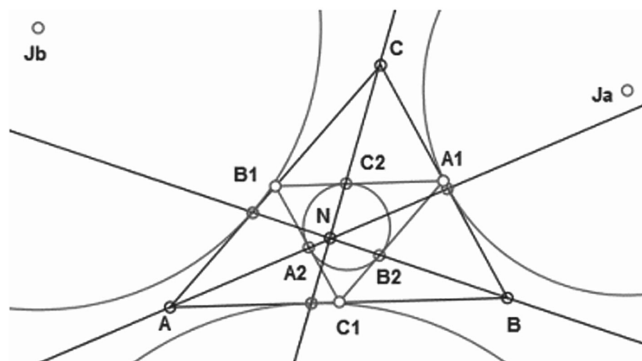
При подхода на Kimberling всяка забележителна точка на $\triangle ABC$ се определя като център на перспектива на $\triangle ABC$ и един друг триъгълник. Например медицентърът се дефинира като център на перспективата на $\triangle ABC$ и медиалния триъгълник на $\triangle ABC$. Перспективните триъгълници се използват в Евклидовата геометрия и при задачите за построение с линейка и пергел, както и при други задачи.

Казваме, че два триъгълника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ са *перспективни*, ако правите AA_1 , BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка. Пресечната точка на правите се нарича *център на перспективата*. В последно време вместо термина „център на перспективата“ се използва терминът „перспектор“. В някои случаи перспекторите са центрове на хомотетия на триъгълниците.

По-долу ще преформулираме две теореми за перспектори, произведени от „Откривател“.

Теорема 5. The Nagel Point is the Prespector of Triangle ABC and the Intouch Triangle of the Medial Triangle.

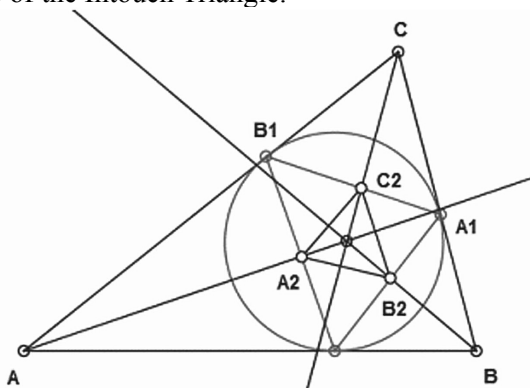
Задача 5. Даден е $\triangle ABC$ и нека A_1 е средата на страната BC . Аналогично определяме точките B_1 и C_1 . Нека A_2 е допирната точка на вписаната в $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност и страната B_1C_1 . Аналогично определяме точките B_2 и C_2 . Докажете, че правите AA_2 , BB_2 и CC_2 се пресичат в една точка. Да означим с N тази пресечна точка. Докажете, че правата AN пресича правата BC в точката, която е допирната точка на външновписаната в $\triangle ABC$ окръжност, която е срещу $\angle A$. Докажете аналогични твърдения и за правите BN и CN (Фиг.6).



Фиг. 6

Теорема 5 наскоро беше включена в Kimberling, Nagel Point, като е отбелязано, че теоремата е открита през 2011 г. от Randy Hutson. Всъщност, теоремата е открита не от човек, а от компютърна програма, от прототипа на „Откривател“ и е публикувана през 2007 г. в JCGM (2007, Nagel Point). Подобна е ситуацията и с поредица от подобни теореми, наскоро включени в Kimberling и които са публикувани през 2007 г. в JCGM (виж например Kimberling, Symmedian Point; Kimberling, Mittenpunkt и т.н.). Авторите благодарят на Кимбърлин за оценката на важността на теоремите, изразена в това, че са включени в енциклопедията Kimberling.

Теорема 6. The Yff Center of Congruence is the Prespector of Triangle ABC and the Incentral Triangle of the Intouch Triangle.

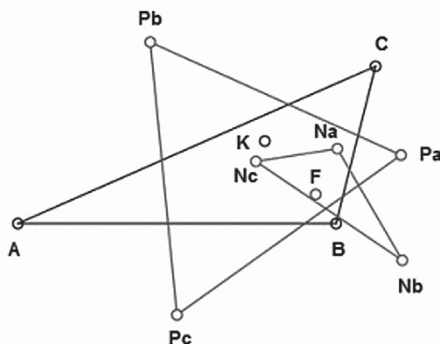


Фиг. 7

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$ и нека A_1 е допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и страната BC . Аналогично определяме точките B_1 и C_1 . Нека I е центърът на вписаната в $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност и нека правата A_1I пресича страната B_1C_1 в точка A_2 . Аналогично определяме точките B_2 и C_2 . Докажете, че правите AA_2 , BB_2 и CC_2 се пресичат в една точка (Фиг.7). Да означим с Y тази пресечна точка. В означенията на задача 2 докажете, че триъгълниците YP_2Q_3 , Q_1YP_3 и P_1Q_2Y са еднакви.

Теорема 6 дава още един подход за построяване с линейка и пергел на точката на Yff, т. е. теорема 6 може да послужи, за да получим още едно решение на задача 2а.

Теорема 7. The Fourth Brocard Triangle is perspective with the Triangle of the Circumcenters of the Triangulation Triangles of the Outer Fermat Point.



Фиг. 8. Точка K е пресечна точка на правите $PaNa$, $PbNb$ и $PcNc$ (правите не са начертани на чертежа).

Задача 7. Даден е $\triangle ABC$ и нека $\triangle BCFa$ е равнобедрен триъгълник с основа BC и ъгъл при основата 60° , като върхът Fa не е в полуравнината, определена от правата BC , в която се намира върхът A . Аналогично определяме триъгълници $CAFb$ и $ABFc$. Докажете, че правите AFa , BFb и CFc се пресичат в една точка. Да означим тази точка с F . Нека Pa е центърът на описаната около $\triangle BCF$ окръжност. Аналогично дефинираме точките Pb и Pc . Нека Na е пресечната точка на правата през медицентъра на $\triangle ABC$ и върха A и окръжността, която има за диаметър отсечката, свързваща медицентъра и ортоцентъра на $\triangle ABC$. Аналогично определяме точките Nb и Nc . Докажете, че правите $PaNa$, $PbNb$ и $PcNc$ се пресичат в една точка (Фиг.8).

Резултати, получени с „Откривател“, могат да бъдат преформулирани като две задачи, които допълват задача 7.

Задача 7а. Даден е $\triangle ABC$ и нека La и Ma са пресечните точки съответно на вътрешната и външната ъглополовяща на $\angle A$. Нека cA е окръжността с диаметър $LaMa$. Аналогично определяме окръжности cB и cC . Нека K е пресечната точка на правите $PaNa$, $PbNb$ и $PcNc$, определени в условието на задача 7. Докажете, че окръжностите cA , cB и cC се пресичат в точка K .

Задача 7б. Нека $\triangle PaPbPc$ е триъгълникът, определен в условието на задача 7. Докажете, че този триъгълник е равностраничен.

Окръжностите, определени в условието на задача 7а, са окръжностите на Аполон за $\triangle ABC$, а $\triangle NaNbNc$, определен в условието на задача 7, е инволюционният триъгълник, изучаван в Гроздев & Ненков от 2012.

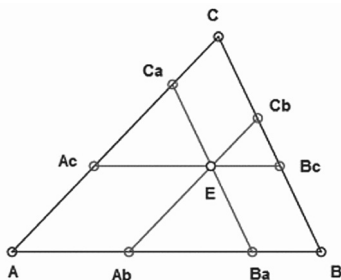
Тема 3. Произведения на забележителни точки в триъгълника

През последните години интензивно се изучават различни видове произведения и трансформации на забележителни точки в триъгълника. През 2011 г. Randy Hutson (Kimberling, Kosnita Point) дефинира произведение на забележителни точки в триъгълника, наречено от него „произведение на Коснита“ („Kosnita Product“). Произведението на Коснита е определено не за всички двойки забележителни точки. Ще отбележим, че вместо „Kosnita Product“ „Откривател“ използва термина „Triangulation Product“.

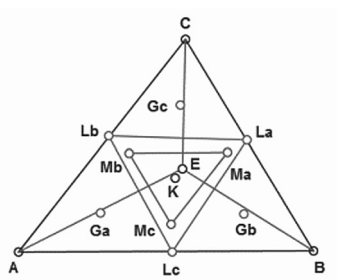
Нека P и Q са две забележителни точки в $\triangle ABC$, а O_A е забележителна точка от тип Q в $\triangle PBC$. Аналогично определяме точките O_B и O_C . Казваме, че $\triangle Q_AQ_BQ_C$ е *триъгълник на Коснита* и ако $\triangle ABC$ и $\triangle Q_AQ_BQ_C$ са перспективни, казваме, че е определено *произведение на Коснита* на точките P и Q , което е равно на персептора на тези триъгълници. Произведението на Коснита бележим с $K(P, Q)$. Ако триъгълниците $\triangle ABC$ и $\triangle Q_AQ_BQ_C$ не са перспективни, произведение на Коснита не е определено.

По-долу ще преформулираме една от теоремите за произведение на Коснита, открита от „Откривател“.

Теорема 8. The Triangulation Product of the Equal Parallelians Point and the Centroid is the Grinberg Point.



Фиг. 9



Фиг. 10

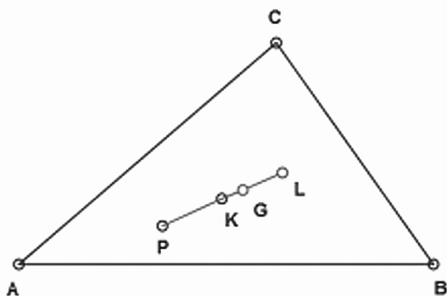
Задача 8. Докажете, че във вътрешността на $\triangle ABC$ има единствена точка със следното свойство. Нека правата през точката, която е успоредна на BC , пресича страните AB и AC съответно в точките Ba и Ca . Аналогично определяме точките Ab , Cb , Ac и Bc . Тогава отсечките $BaCa$, $AbCb$ и $AcBc$ имат еднаква дължина (Фиг. 9). Да означим тази точка с E . Нека Ma е медицентърът на $\triangle BCE$. Аналогично определяме точките Mb и Mc . Нека La е пресечната точка на вътрешната ъглополовяща на $\angle A$ и страната BC . Аналогично определяме точките Lb и Lc . Нека Ga е медицентърът на $\triangle ALbLc$. Аналогично определяме точките Gb и Gc . Докажете, че правите AMa , BMb , CMc , AGa , BGb и CGc се пресичат в една точка (Фиг. 10).

На фиг. 10 пресечната точка на правите AMa , BMb , CMc , AGa , BGb и CGc е означена с K , като правите не са начертани на фигурата.

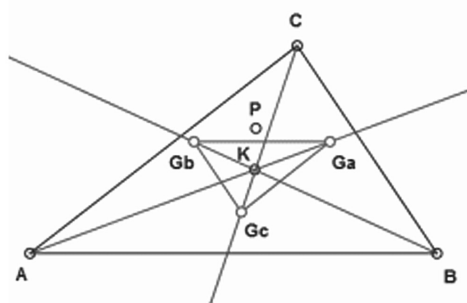
Ще преформулираме и една теорема за произведения на Коснита, открита от „Откривател“, в която фигурира произволна точка от $\triangle ABC$. Тази теорема може да бъде използвана за лесно намиране на произведения на Коснита от вида $K(P, G)$, където G е медицентърът на $\triangle ABC$.

Теорема 9. The Triangulation Product of Point P and the Centroid is the Complement of the Complement of Point P.

Задача 9. Нека P е произволна точка в равнината на $\triangle ABC$, различна от върховете на триъгълника, а G е медицентърът на $\triangle ABC$. Нека Ga е медицентърът на $\triangle PBC$. Аналогично определяме точките Gb и Gc . Нека L е образът на точката P при хомотетията $h(G, k)$ с център G и коефициент $k = -\frac{1}{2}$. Нека K е образът на точката L при същата хомотетия $h(G, k)$ (Фиг.11). Докажете, че правите AGa , BGb и CGc се пресичат в точка K (Фиг.12).



Фиг. 11



Фиг. 12

Може да се отбележи, че K в горната задача е точката, която дели вътрешно отсечката PG в отношение 3:1. Задачата по-горе е формулирана така, че да може да бъде проследено преформулирането на теоремата.

Скица на доказателство. Без ограничение на общността избираме ортонормирана координатна система Oxy така, че върховете на триъгълника да имат следните координати: $A(a, 0), B(b, 0), C(0, c)$. Нека $P(u, v)$ е произволна точка в равнината на триъгълника, различна от върховете му. Нека точките Ma, Mb, Mc са средите съответно на отсечките BC, CA, AB . Намираме медицентъра на триъгълника G като точката, която дели вътрешно отсечката AMa в отношение 2:1. Аналогично намираме медицентрове Ga, Gb, Gc на триъгълниците PBC, PCA, PAB като точките, делищи вътрешно съответно отсечките PMa, PMb, PMc в отношение 2:1. Намираме точка K , която дели вътрешно отсечката PG в отношение 3:1. Доказваме, че точките A, K, Ga лежат на една права. Доказваме, че точките B, K, Gb лежат на една права, а също, че и точките C, K, Gc лежат върху една права. От това следва, че точката K лежи едновременно върху правите AGa, BGb и CGc , което означава, че K е пресечна точка на тези прави. Ще отбележим, че същата схема на доказателство може да се приложи, като се използват не декартови, а барицентрични координати. В някои задачи барицентричните координати са по-удобни. При тях може да се използва обстоятелството, че барицентричните координати на редица забележителни точки и на други обекти в геометрията на триъгълника са предварително пресметнати и могат да се използват наготово. Например в доказателството на тази задача можем да използваме барицентричните координати на медицентъра $G = (1, 1, 1)$, а нормираните барицентрични координати са $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Прилагаме програмата за компютърна алгебра Maple за изготвяне на доказателството. По този начин доказателството се свежда до писането на по-

редица от команди на Maple и щракане с мишката, като си спестяваме пресмятанията. По този начин се постига бързина и освен това се избягват евентуални грешки. Файлове на Maple с командите и резултатите от тяхното изпълнение са приложени към статията. Файлът Theorem9_1.mws съдържа командите, които използваме при доказателство с декартови координати, а файлът Theorem9_2.mws съдържа командите при доказателство с барицентрични координати.

От теорема 9 може да се получи като следствие теорема 8, ако отчетем следното твърдение, което лесно се получава с „Откривател“: „The Grinberg Point is the Complement of the Complement of the Equal Parallelisms Point“.

В Евклидовата геометрия възникват много случаи за намиране на композиции на различни трансформации, като цитираната теорема съдържа пример за композиция на трансформации от вида „Complement of Complement“. Трансформации и композиции на трансформации могат лесно да бъдат изучавани с „Откривател“, но това е отделна тема, която тук няма да бъде разглеждана.

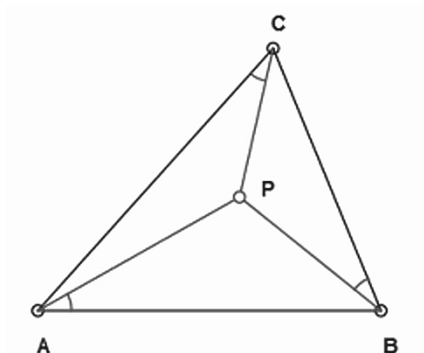
Тема 4. Геометрични места на забележителни точки в триъгълника

В последно време различни геометрични места на забележителни точки в триъгълника са обект на обширно изучаване. Особено внимание се отделя на геометричните места, които са криви от втора и трета степен. Едно от първите геометрични места на забележителни точки в триъгълника е хиперболата на Кипърт (Kiepert), въведена от Кипърт през 1869 г.

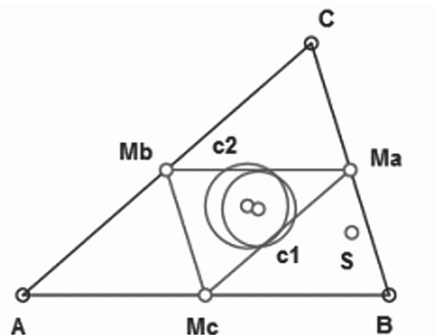
По-долу ще преформулираме една от теоремите за геометрично място.

Теорема 10. The External Center of Similitude of the Brocard Circle and the Second Brocard Circle of the Medial Triangle lies on the Kiepert Hyperbola.

Задача 10. Докажете, че във вътрешността на даден $\triangle ABC$ съществува единствена точка P – такава, че $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ (фиг. 13), и съществува единствена точка Q – такава, че $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC$. Нека c_1 е окръжността през точките P , Q и през центъра на окръжността, описана около $\triangle ABC$. Нека $\triangle MaMbMc$ е медиалният триъгълник на $\triangle ABC$, а Om е центърът на описаната около $\triangle MaMbMc$ окръжност. Нека точка Pm е определена както точка P , но спрямо $\triangle MaMbMc$. Нека c_2 е окръжността с център Om и минаваща през точка Pm . Нека S е външният център на хомотетия на окръжностите c_1 и c_2 (Фиг. 14). Докажете, че съществува ъгъл α , определен, както следва. Нека $\triangle BCFa$ е равнобедрен триъгълник с основа BC и ъгъл при основата, равен на α . Аналогично определяме $\triangle CAFb$ и $\triangle ACFc$. Тогава правите AFa , BFb и CFc се пресичат в точка S .



Фиг. 13



Фиг. 14

Нееднозначност на естествените езици

В теорема 2 е определена точката „Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle wrt the Pedal Triangle of the Incenter“. Ако в горното определение заменим „wrt“ с „of“, ще получим друга точка. Двата текста коректно описват съответните точки, но при положение че правим ясна разлика между предлозите. Различните автори се справят с този проблем по различен начин. Ако се налага да именуваме все по-сложни обекти, трябва да следваме правила за именуването на обектите. Тези правила са описани в CGEEG (2013).

Заключителни бележки

В тази статия с примери е показано как една теорема, открита от „Откривател“, може да се преформулира във вид, подходящ за използване в средното училище. Компютърната програма „Откривател“ е в начален етап на разработване. Авторите се надяват, че с помощта на читателите следващите тестови версии на компютърната програма ще бъдат в състояние да произведат една пълна енциклопедия по Евклидова геометрия. Тази енциклопедия би следвало да включва около сто хиляди теореми, поне половината от които са нови и са открити от компютъра. Това ще бъде и един източник на задачи за учебния процес, за сборници, реферати, дипломни работи, кръжоци, за подготовка за олимпиади и т.н.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Към статията е приложен файлът apps.zip, който съдържа два файла във формат MWS (формат на Maple), които са цитирани в тази статия.

Този файл може да бъде изтеглен от уеб страницата на книжката на списанието.

БЕЛЕЖКИ

1. Weisstein, E. W. *MathWorld – A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/>
2. *CGEEG, Computer-Generated Encyclopedia of Euclidean Geometry*, (2013), in preparation.
3. Pohoata, C. (2010). On the Euler Reflection Point, *Forum Geometricorum*, 10, 157-163. <http://forumgeom.fau.edu/FG2010volume10/FG201018.pdf>
4. Kimberling, C. *Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers*, <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
5. *Wikipedia*, <http://en.wikipedia.org/wiki/>
6. *JCGM, Journal of Computer-Generated Mathematics*, <http://www.ddekov.eu/j/index.htm>

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С., В. Ненков (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед.
- Гроздев С., Д. Деков (2013). По пътя към първата компютърно генерирана енциклопедия. *Математика и информатика*, 56, 1, 49 – 59.
- Паскалев, Г. (2001). *Математика за 8. клас*. София: Архимед.
- Станислов, Г. (2004). Компютърни методи в геометрията на триъгълника. *Proc. of the 33. Spring Conf. of the Union of Bulg. Mathematicians*. София: СМБ.

SOME APPLICATIONS OF THE COMPUTER PROGRAM „DISCOVERER“

Abstract. The aim of the computer program „Discoverer“, which is in process of development by the authors of this article, is to discover new theorems in Euclidean Geometry. The authors present some theorems, generated by „Discoverer“ and show how these theorems could be used.

Sava Grozdev

✉ Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Deko Dekov

✉ Associated Professor, PhD in Mathematics
81, Zahari Knjazhevski Str.
Stara Zagora
E-mail: ddekov1@gmail.com

ЕДНО ИНТЕРЕСНО СВОЙСТВО ЗА НЯКОИ КЛАСОВЕ РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

Росен Николаев

Резюме. Статията е посветена на методическото определяне на някои класове реални функции, за които разстоянието между абсцисите на кои да е две точки от графиките им е равно на разстоянието между пресечните точки на допирателните към графиките през двете точки и абсцисната ос.

Keywords: function, exponent, graphics, tangent, distance

В процеса на съставяне на темата за Националната студентска олимпиада през 2013 г. достигнахме до едно интересно геометрично свойство. Една от задачите, върху която работехме и по наше мнение бе удачно да бъде включена в темите за студенти от технически, технологически и икономически специалности (Гроздев & Ненков, 2012), има следния вид:

Дадена е функцията $f(x) = e^{2x}$ и през точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ($x_2 - x_1 = 3$) от нейната графика са построени допирателните t_A и t_B , които пресичат оста Ox съответно в точки A_1 и B_1 . Да се намери дължината на отсечката A_1B_1 .

Ще изложим решението на тази задача, като вземем предвид, че $A(x_1, e^{2x_1})$ и $B(x_2, e^{2x_2})$. За уравненията на t_A и t_B имаме (Гроздев, 2010):

$$t_A : y = 2e^{2x_1}x - e^{2x_1}(2x_1 - 1)$$

$$t_B : y = 2e^{2x_2}x - e^{2x_2}(2x_2 - 1),$$

а за точките A_1 и B_1 – съответно $A_1\left(\frac{2x_1 - 1}{2}, 0\right)$ и $B_1\left(\frac{2x_2 - 1}{2}, 0\right)$. За дължината на

отсечката A_1B_1 се получава $|A_1B_1| = 3$. От решението прави впечатление, че разстоянието между точките A_1 и B_1 е същото като това между абсцисите на A и B . Първият въпрос, който възниква, е дали това е случайност, или не зависи конкретно от числото 3.

Модифицираме условието и приемаме, че $x_2 - x_1 = k$ ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). След като решим задачата, се оказва, че наистина $|A_1B_1| = |k|$. Така стигаме до извода за конкретната експоненциална функция, че ако построим допирателни през които и да