

EXCEL В ПОМОЩ ПРИ РЕШАВАНЕ НА НЯКОИ ПОКАЗАТЕЛНИ УРАВНЕНИЯ

Диана Стефанова, Пламен Пенев

Резюме. Статията предлага включване на възможности на експерименталната среда на програмата Excel за разнообразяване решаването на някои групи показателни уравнения от ученици в средното училище

Keywords: problem solving, indicative equation, number, table, macros

В настоящата статия прилагаме идеята за решаване на тригонометрични уравнения от брой 2/2016 г. при решаване на показателни уравнения. Ще покажем как програмата Excel се използва в обучението по математика по тази тема. В училищния курс по математика се изучават показателни уравнения, систематизирани в групи, което дава възможност на учениците да се ориентират към начина за решаването им. Ще илюстрираме възможностите на Excel при решаването на някои групи показателни уравнения. Разработката е направена така, че да се използва паралелно с традиционния начин на изучаване на показателни уравнения.

Уравнение, в което неизвестното е в степенния показател, се нарича показателно уравнение. Например: уравненията $6^x - 3^{2x} = 2^{2x}$; $2.5^{x-2} = 7.5^x + 3$; $4^{x-1} = x+5$ са показателни.

При решаването на показателни уравнения се използват: определението за степен; правила за действия със степени и логаритми; теореми и свойства на показателната функция. В сила са всички теореми за равносилност на алгебрични уравнения. Задачите, които ще използваме за илюстрация, имат една и съща формулировка: „Да се реши уравнението“, която ще изпускате, за да избегнем повторението.

За успешното формиране на умения за решаване ще систематизираме показателните уравнения в следните групи.

I група. Уравнения от вида $a^{f(x)} = b$, където $f(x)$ е елементарна функция, а $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$. Решенията на това уравнение зависят от стойностите на a и b и затова трябва да се разгледат следните случаи.

A) Ако $a > 0$; $a \neq 1$ и $b > 0$, то уравнението има решение и корените могат да се намерят по два начина. Първият начин е чрез привеждане на двете страни на уравнението към степени с една и съща основа. Вторият начин е чрез логаритмуване на двете страни на даденото уравнение.

Задачи:

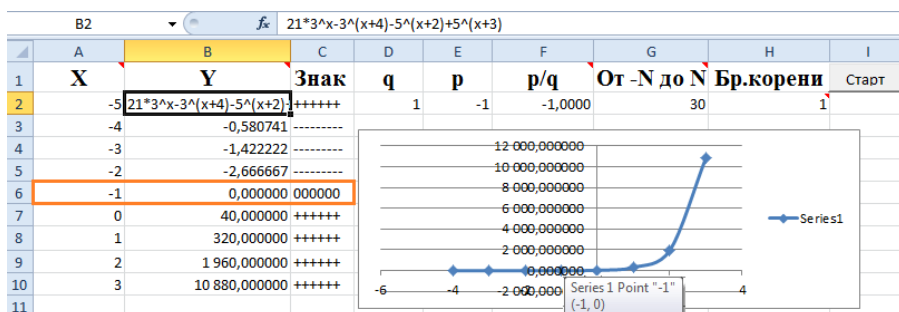
1. $2^{x^2-5x+6} = 1$.
2. $3^{x^2-\frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{9}$.
3. $8^{x-3} = 9^{3-x}$.
4. $(3^{5-x})^{6-x} = 9$.
5. $5^{x-\sqrt{3x-5}} = 125$.
6. $21 \cdot 3^x - 3^{x+4} = 5^{x+2} - 5^{x+3}$

Ще илюстрираме решението на задача 6. Прилагаме свойството $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ и получаваме $21 \cdot 3^x - 3^x \cdot 3^4 = 5^x \cdot 5^2 - 5^x \cdot 5^3$, след което представяме уравнението във вида

$$-60 \cdot 3^x = -100 \cdot 5^x, \text{ а оттам и до } \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}. \text{ Намираме, че } x = -1.$$

Решение с Excel:

Използваме макрос ForFor, описан в (Penev, 2014b).



$$7. 9^{2x+1} = 7.$$

$$8. 5^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 100.$$

Решение: определяме Д.С. $x \neq -1$ на задача 8, след което записваме уравнението във вида: $5^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 10^2$, делим на 10^2 двете страни на уравнението и получаваме $5^{x-2} \cdot 2^{\frac{x-2}{x+1}} = 1$ или $\left(5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2} = 1$.

Имаме две възможности: показател нула или основа единица, т.е. $x_1 = 2$ или $5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}} = 1$ (1). За да намерим корена от (1), логаритмуваме двете му страни при основа 5, преобразуваме и получаваме $x_2 = -\log_5 10$.

Б) Ако $a > 0$ и $b \leq 0$, то уравнението няма решение, например: $5^{x-3} = -2$.

В) Ако $a = 1$ и $b \neq 1$, то уравнението няма решение, например: $1^{x+3} = 2$.

Г) Ако $a = 1$ и $b = 1$, то всяка допустима стойност на неизвестното е решение на уравнението, например: $1^{\sqrt{x-5}} = 1$.

Съществуват показателни уравнения, които след преобразуване се свеждат до случаите в I група, като:

II група. Уравнения от вида $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, където $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $b \neq 1$. Решаваме ги, като логаритмуваме двете страни на уравнението при една и съща основа. Тогава уравнението добива вида $a^{f(x)} = a^{g(x) \log_a b}$, което е еквивалентно на $f(x) = g(x) \log_a b$.

Уравненията от тази група се явяват обобщения на уравненията от I група.

Решете уравненията в задачи от 1 до 8:

$$1. 3^{\frac{1}{2}} - 2^{2x} = 4^{\frac{x-1}{2}} - 3^{\frac{x+1}{2}}. \quad 2. 3 \cdot 2^{x-5} = 5 \cdot 7^{2x}. \quad 3. 5^{x^2+x} \cdot 4^{x^2} = 100^{x^2}. \quad 4. 3^{2x-1} = 5^{3-x}.$$

$$5. 4 \cdot 7^{x-2} = 28^{x+1}. \quad 6. 5^x \cdot \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500. \quad 7. 2^x \cdot 3^x = \frac{3}{2^{-1}} \sqrt[3]{6^{4x-10}}. \quad 8. 5^{x-3} = 8^{x^2-7x+12}.$$

Ще илюстрираме решението на задача 8:

Решение: в уравнението $5^{x-3} = 8^{(x-3)(x-4)}$ делим двете му страни на 5^{x-3} и получаваме $1 = \left(\frac{8^{x-4}}{5}\right)^{x-3}$, откъдето $x-3=0$ или $1 = \frac{8^{x-4}}{5}$, т.е. $x_1 = 3$ или $x_2 = 4 + \log_8 5$.

III група. Показателни уравнения, които се решават чрез разлагане на множители.

По този начин могат да се решат например следните уравнения:

$$1. 4^{x+1} + 4^x = 320. \quad 2. 2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450. \quad 3. 6^x + 15 = 5 \cdot 2^x + 3^{x+1}.$$

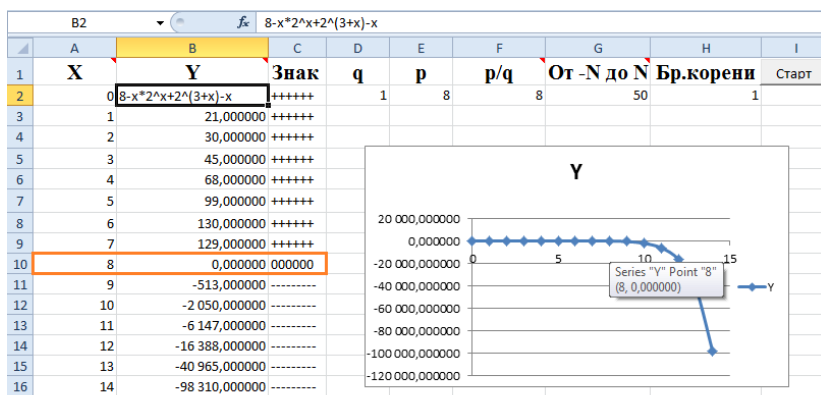
$$4. 4^{2x-9} - 2^{4x-24} + 4^{2x-12} - 16^{x-6} = 1008.$$

Ще илюстрираме решението на тази група с решаването на следната задача:

$$5. 8 - x \cdot 2^x + 2^{3+x} - x = 0.$$

Решение: като използваме свойство $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$, представяме уравнението във вида $8 - x \cdot 2^x + 2^3 \cdot 2^x - x = 0$ и след групиране получаваме уравнението $(2^x + 1) \cdot (8 - x) = 0$. Тъй като $2^x + 1 = 0$ няма решение, то единствен корен на уравнението е $x = 8$.

Решение с Excel:



IV група. Показателни уравнения, които се опростяват чрез субституция. Те имат вида $F(a^{f(x)}) = 0$, където F и f са елементарни функции. Чрез субституцията $t = a^{f(x)}$, $t > 0$ даденото уравнение се свежда до алгебричното уравнение $F(t) = 0$, $t > 0$. Сред тези уравнения са уравненията от вида:

А) $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p = 0$, които чрез субституцията $a^{f(x)} = t$, $t > 0$ се свеждат до квадратно уравнение (тричленно показателно уравнение).

1. $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$. 2. $2 \frac{1}{4} \cdot 4^x - \frac{1}{2} \cdot 4^{2x} = 1$. 3. $5^x - 5^{3-x} = 20$.

Б) $A_0 \cdot a^{f(x)} + A_1 \cdot b^{f(x)} + A_2 = 0$

1. $4^{\sqrt{x^2-2}+x} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$

В) Показателни уравнения от вида $\dot{u}^x \pm \dot{x} =$, където $A \cdot B = 1$.

1. $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x + (\sqrt{6} - \sqrt{35})^x = 12$

Решение: понеже $\sqrt{6} + \sqrt{35} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{35} = 1$, умножаваме двете страни на уравнението с $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x$, след което получаваме $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^{2x} - 12(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x + 1 = 0$. Полагаме $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x = y$. Определяме Д.С. $y > 0$ и решаваме квадратното уравнение. Получаваме $y_{1,2} = 6 \pm \sqrt{35}$. Следователно $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x = 6 + \sqrt{35}$ с корен $x_1 = 2$ и $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x = 6 - \sqrt{35}$, което преобразуваме до $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x = \frac{1}{6 + \sqrt{35}}$.

Получаваме $x_2 = -2$.

2. $(2 + \sqrt{3})^x + 3(2 - \sqrt{3})^x = 4$ 3. $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^x = 10$.

Г) $A_0 \cdot (a^{2x} + a^{-2x}) + A_1 \cdot (a^x + a^{-x}) + A_2 = 0$.

Решаването на задачи от Г) ще илюстрираме със следния пример 1:

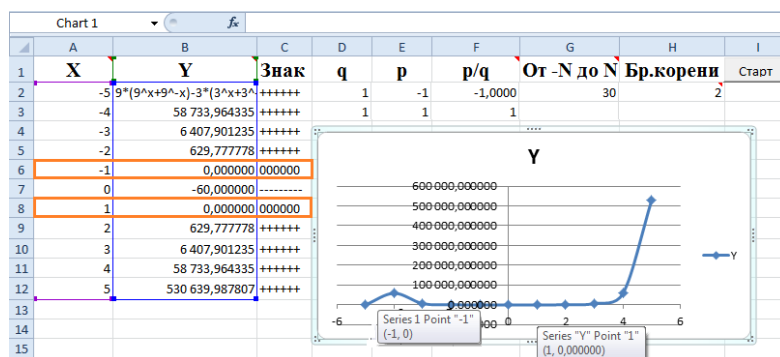
1. $9 \cdot (9^x + 9^{-x}) - 3 \cdot (3^x + 3^{-x}) - 72 = 0$

Решение: за целта полагаме $3^x + 3^{-x} = y, y \geq 2$. Тогава $9^x + 9^{-x} = 3^{2x} + 3^{-2x} = y^2 - 2$ и $9(y^2 - 2) - 3y - 72 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - y - 30 = 0$.

Корените на това уравнение са $y_1 = \frac{10}{3}$ и $y_2 = -3$. Тъй като $y_2 < 0$, а по условие $y \geq 2$, решението на уравнението се определя от $y_1 = \frac{10}{3}$. Тогава

$3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$. Полагаме $3^x = t, t > 0$ и получаваме уравнението $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$, чиито корени са $t_1 = 3$ и $t_2 = \frac{1}{3}$. Решението на даденото уравнение се свежда до решаване на двете уравнения $3^x = 3$ и $3^x = \frac{1}{3}$, откъдето намираме, че $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Решение с Excel:



Ще предложим и решение на задача 2:

2. $(1 + \sqrt{3})^x + 2^{x-1}(2 + \sqrt{3})^x = 4$

Решение: отново използваме свойството $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ и получаваме $(1 + \sqrt{3})^x + \frac{2^x(2 + \sqrt{3})^x}{2} = 4$, след което преобразуваме до вида $(1 + \sqrt{3})^x + \frac{(2 \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{3})^x}{2} = 4$. От $(1 + \sqrt{3})^{2x} = (4 + 2\sqrt{3})^x$ следва, че мо-

жем да запишем уравнението във вида $(1 + \sqrt{3})^x + \frac{(1 + \sqrt{3})^{2x}}{2} = 4$. Полагаме $(1 + \sqrt{3})^x = y$, $y > 0$ и получаваме уравнението $y^2 + 2y - 8 = 0$, което има корени $y_1 = 2$ и $y_2 = -4 < 0$. Окончателно намираме, че $x = \log_{(1+\sqrt{3})} 2$.

V група. Показателни уравнения, които са хомогенни:

А) хомогенни от първа степен относно a^x и b^x : $m \cdot a^x + n \cdot b^x = 0$, където m и n са реални числа. Нека $0 < b < a$. Разделяме двете страни на даденото уравнение на $b^x > 0$ и получаваме показателно уравнение $m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^x + n = 0$, което е от първа група.

Задачи:

1. $9 \cdot 7^x - 49 \cdot 3^x = 0$. 2. $5^{x-3} = 7^x$. 3. $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

Б) Уравнение от вида: $m \cdot a^{2x} + n \cdot a^x \cdot b^x + p \cdot b^{2x} = 0$, където a , b и m , n , p са реални константи, като $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $b \neq 1$. Такива уравнения се наричат хомогенни показателни уравнения от втора степен относно a^x и b^x . Те се свеждат до квадратни след деление на $b^{2x} > 0$ и полагане $\left(\frac{a}{b}\right)^x = y$, $y > 0$.

4. $4^x + 6^x = 9^x$. 5. $16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$. 6. $2 \cdot 7^x - 5^x = \sqrt{35^x}$. 7. $9^x = 6^x + 2^{2x+1}$.

Решение: ще решим уравнението от задача 7. Записваме го по следния на-

чин: $3^{2x} = 3^x \cdot 2^x + 2^{2x} \cdot 2$ и преобразуваме до $3^{2x} - 3^x \cdot 2^x - 2^{2x} \cdot 2 = 0$. Делим двете страни на 2^{2x} и записваме уравнението във вида $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$;

откъдето получаваме $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$ или $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -1$. Тъй като $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -1$ няма решение, то решението се определя от $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$, т.е. $x = 4 + \log_{1,5} 2$.

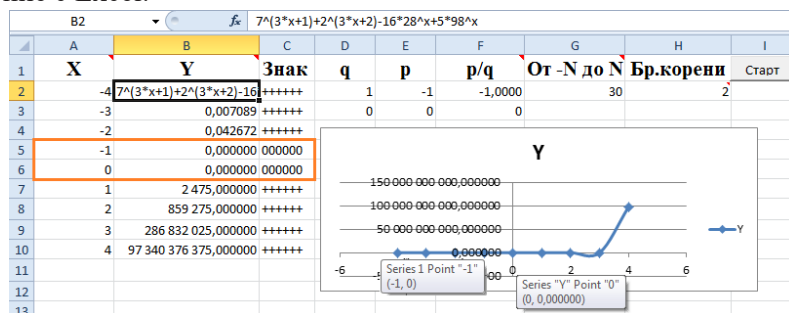
В) Хомогенни уравнения от трета степен относно a^x и b^x .

8. $7^{3x+1} + 2^{3x+2} = 16 \cdot 28^x - 5 \cdot 98^x$

Решение: използваме свойство $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ и записваме уравнението по следния начин: $7 \cdot 7^{3x} + 4 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^{2x} \cdot 7^x + 5 \cdot 2^x \cdot 7^{2x} = 0$. Делим двете му страни на 2^{3x} и уравнението добива вида $7 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{3x} + 5 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{2x} - 16 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^x + 4 = 0$. Полага-

ме $\left(\frac{7}{2}\right)^x = y$, като $y > 0$ и получаваме уравнението $7 \cdot y^3 + 5 \cdot y^2 - 16 \cdot y + 4 = 0$, чиито корени са $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{2}{7}$ и $y_3 = -2$. Решенията на уравнението намираме чрез субституцията $\left(\frac{7}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0$ и $\left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x_2 = -1$.

Решение с Ексел:



VI група. Показателни уравнения с неизвестно и в основата. Те са от вида:

А) Уравнение от вида $f(x)^{\varphi(x)} = 1$.

За да се реши уравнение от този вид, трябва да се разгледат три случая:

1. $\begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \varphi(x) \text{ е дефинирана} \\ f(x) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \varphi(x) \text{ е четно число} \\ f(x) = -1 \end{cases}$

Задачи:

1. $(x-3)^{x+5} = 1$. 2. $(x^2 - 5x)^{3x-6} (x+3)^{6-3x} = 1$.

3. $(4x^2 + 2x + 1)^{\frac{x^2 - 2x - 15}{x+0,5}} = 1$. 4. $|x|^{x^2 - x - 2} = 1$.

Ще илюстрираме решаването на задачи от тази група със следващата задача

5. $(x^2 - 3x)^{2x-4} \cdot (x+1)^{4-2x} = 1$

Решение: тъй като $x = -1$ не е решение, даденото уравнение е еквивалентно на уравнението $\left(\frac{x^2 - 3x}{x+1}\right)^{2x-4} = 1$. За целта ще разгледаме:

$$1) \left| \begin{array}{l} 2x - 4 = 0 \\ \frac{x^2 - 3x}{x + 1} \neq 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ x \neq 0 \text{ и } x \neq 3. \\ x \neq -1 \end{array} \right. \text{ Следователно } x = 2 \text{ е решение.}$$

$$2) \left| \begin{array}{l} \frac{x^2 - 3x}{x + 1} \neq 0 \\ 2x - 4 \text{ е дефинирана за всяко } x \end{array} \right| \Leftrightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

3) $\frac{x^2 - 3x}{x + 1} = -1 \Leftrightarrow x = 1$. Освен това за $x = 1$ показателят $2x - 4 = -2$ е четно число. Следователно решенията на уравнението са: $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5}$; $x_3 = 2$; $x_4 = 1$.

Б) Уравнението $f(x)^{\varphi(x)} = f(x)^{g(x)}$ се решава чрез специфични изследвания и методи. Неговите решения се намират, като се обединят решенията на следните уравнения:

1. $f(x) = 0$, при условие че $\varphi(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

2. $f(x) = 1$, при условие че $\varphi(x)$ и $g(x)$ са дефинирани.

3. $f(x) = -1$, при условие че $\varphi(x)$ и $g(x)$ са едновременно четни или едновременно нечетни числа или са несъкратими обикновени дроби с нечетен знаменател, на който числителите са с една и съща четност.

4. $\varphi(x) = g(x)$, при $f(x) > 0$, а когато $f(x) < 0$, трябва $\varphi(x)$ и $g(x)$ да са цели числа с или дробни числа с нечетен знаменател.

Примери: 1. $x^2 = x^{3x+1}$. 2. $x^{2x^2} = x^{x+1}$. 3. $x = x^{x-1}$. 4. $x^{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt{x^x}$.

$$5. \sqrt[4]{(x-3)^{x+1}} = \sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}$$

VII група. Уравнения от вида $a^{f(x)} = \varphi(x)$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Ще търсим решенията на такива уравнения измежду стойностите на x , за които $\varphi(x)$ и $f(x)$ са дефинирани и $\varphi(x) > 0$. Уравненията от тази група се свеждат до разглеждане на показателната функция $a^{f(x)}$, а $\varphi(x)$ е алгебрична или трансцендентна функция.

Задачи:

$$1. 2^{x-1} = x + 1. \quad 2. 2^x = x^2 - 2x. \quad 3. \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + \frac{1}{x}. \quad 4. 2^x = \operatorname{tg} x.$$

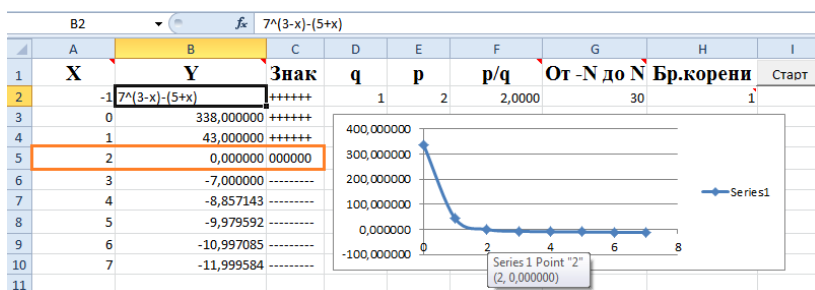
$$5. 2^x = \sqrt{3-x}.$$

6. Да се докаже, че уравнението $7^{3-x} = 5 + x$ има единствено решение.

Решение:

I начин: да означим $f(x) = 7^{3-x}$ и $g(x) = 5+x$. Разгледани като функции, изразите са определени за всяко x , но тъй като $7^{3-x} > 0$, то и $5+x > 0$, т.е. $x > -5$ е множеството от допустими стойности на уравнението. Тъй като $f(2) = 7$ и $g(2) = 7$, то числото 2 е решение на уравнението. Нека допуснем, че то има и други решения $x_1 < 2$ и $x_2 > 2$. Функцията $f(x) = 7^{3-x}$ е намаляваща, т.е. $f(x_1) > f(2) = 7$ и $f(x_2) < f(2) = 7$. Функцията $g(x) = 5+x$ е растяща, т.е. $g(x_1) < g(2) = 7$ и $g(x_2) > g(2) = 7$. Оттук получаваме, че $f(x_1) > 7 > g(x_1)$, следователно $f(x_1) \neq g(x_1)$, т.е. x_1 не е корен на даденото уравнение. Аналогично за x_2 получаваме $f(x_2) < 7 < g(x_2)$, т.е. x_2 не е корен на даденото уравнение. Следователно даденото уравнение няма друг корен освен числото 2.

Решение с Excel:



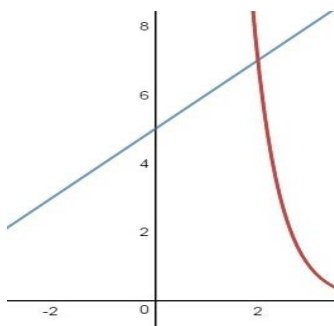
II начин: за да решим задачата без досещането, че $x = 2$ е корен, можем да разсъждаваме така. Разглеждаме непрекъснатата и намаляваща функция $F(x) = 7^{3-x} - x - 5$. Тя приема както отрицателни, така и положителни стойности. Например $F(1) = 43$ и $F(3) = -7$. Според теоремата на Болцано (свойство на непрекъснатата функция в интервал да приема всички „междинни“ стойности) съществува стойност на аргумента $x_0 \in (1;3)$, за която $F(x_0) = 0$. Лесно се установява, че $x = 2$ е корен на уравнението.

III начин: ще решим задачата, като използваме построяване на графиките на функциите на един и същи чертеж. Но по този начин единствеността на корена не е обоснована. Отново да означим $f(x) = 7^{3-x}$ и $g(x) = 5+x$. Тъй като $7^{3-x} > 0$, то и $5+x > 0$, т.е. $x > -5$ е множеството от допустими стойности на уравнението. Функцията $f(x)$ е намаляваща, а $g(x)$ – растяща. Тогава техните графики ще се пресекат в една точка, което означава, че уравнението

има точно един корен. От чертеж 1 следва, че $x = 2$ е евентуален корен на уравнението. Правим проверка за $x = 2$ и установяваме, че $7^{3-2} = 2 + 5$, откъдето получаваме, че $x = 2$ е наистина решение на уравнението.

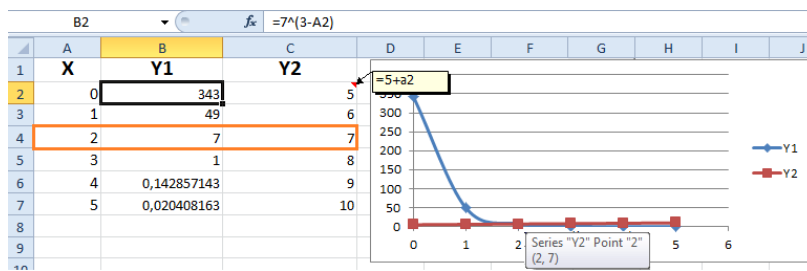
x	0	1	2	3	4
$f(x) = 7^{3-x}$	343	49	7	1	$\frac{1}{7}$

x	0	2
$g(x) = 5 + x$	5	7



Чертеж 1

За проверка на графичното решение с Excel използваме обикновена таблица:



Вижда се, че $x = 2$ е координата на пресечната точка на двете линии.

VIII група. Параметрични показателни уравнения.

Задача 1. Намерете стойностите на параметъра a , за които уравнението $9^{x-1} - 4.3^{x-1} - 1 + 2a = 0$ има точно едно решение.

Решение: преобразуваме даденото уравнение по следния начин: $3^{2x} - 12.3^x + 18a - 9 = 0$. Полагаме $3^x = y$, където Д.С.: $y > 0$ и уравнението добива вида $y^2 - 12y + 18a - 9 = 0$, т.е. получаваме квадратно параметрично уравнение, което можем да решим по няколко начина: чрез формулите за корене-

ните на квадратно уравнение, чрез формулите на Виет, чрез разпределение на корените на квадратно уравнение върху числовата ос и други. Ще илюстрираме решаването на това уравнение чрез формулите за корените на квадратно уравнение. За целта намираме $D = b^2 - 4ac$ и разглеждаме следните случаи:

1) Ако $D < 0$, то уравнението няма решение.

2) Ако $D = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$. Тогава коренът на уравнението е $y = 6 \in \mathbb{D.C.}$, т.е. при $a = \frac{5}{2}$ даденото уравнение има един корен.

3) Ако $D > 0$, корените са два: $y_{1/2} = 6 \pm \sqrt{45 - 18a}$. За да принадлежат на $\mathbb{D.C.}$, те трябва да са положителни, т.е. решаваме две ирационални неравенства: $6 - \sqrt{45 - 18a} > 0$ и $6 + \sqrt{45 - 18a} > 0$. Нека решим неравенството $6 - \sqrt{45 - 18a} > 0$. Преобразуваме го до $\sqrt{45 - 18a} < 6$ и записваме системата

$$\text{та } \begin{cases} 45 - 18a \geq 0 \\ 45 - 18a < 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{5}{2} \\ a > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]. \text{ Да решим и второто неравенство}$$

$$6 + \sqrt{45 - 18a} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{45 - 18a} > -6 \Leftrightarrow \text{всяко число } a \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right].$$

От 2) и 3) следва, че: при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ уравнението има един корен; при $a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ уравнението има два корена; при $a = \frac{5}{2}$ уравнението има един корен; при $a \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ уравнението няма корени. Следователно при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$ даденото уравнение има един корен.

Задача 2. Решете уравнението: $\sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$

(Национален пролетен турнир – Казанлък, 1974 г., X клас)

Решение: полагаме $2^x = y$ и получаваме ирационалното уравнение $\sqrt{ay + 1 - 2a} = 1 - y$. За да има решение полученото уравнение, необходимо е $1 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$. Повдигаме в квадрат и получаваме: $ay + 1 - 2a = 1 - 2y + y^2$ или $y^2 - (a + 2)y + 2a = 0$ с $D = (a - 2)^2$ и корени $y_1 = 2, y_2 = a$. Но $y \leq 1$ и

$y_1 = 2$ не е решение, а $2^x = a$, като $0 < a \leq 1$ и решението е $x = \log_2 a$. Отговор: при $0 < a \leq 1$ решението е $x = \log_2 a$. При $a \leq 0$ или $a > 1$ уравнението няма решение.

Задача 3. Намерете стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $(a^2 + a - 6) \cdot 2^x + 2^{-x} = 2a$ има един положителен и един отрицателен корен.

(Конкурсен изпит СУ, 1996 г.)

Решение: в уравнението $(a^2 + a - 6) \cdot 2^x + 2^{-x} = 2a$ полагаме $2^x = y$ и заместиме: $(a^2 + a - 6) \cdot \frac{1}{y} + y - 2a = 0$, т.е. $y^2 - 2ay + a^2 + a - 6 = 0$. Ако единият

корен е положителен, т.е. $x_1 > 0$, следва, че $y_1 \in (0; 1)$. Ако другият корен е отрицателен, т.е. $x_2 < 0$, следва, че $y_2 > 1$. Според разпределението на корените на квадратното уравнение числото 0 трябва да е по-малко от корените на уравнението, а числото 1 трябва да е между корените. Числото 1 е между корените y_1 и y_2 на квадратното уравнение, ако $a^2 - a - 5 < 0$, т.е.

$a \in \left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)$. Числото 0 е по-малко от корените y_1 и y_2 на уравне-

нието, ако $a^2 + a - 6 > 0$, т.е. $a \in (-\infty; 3) \cup (2; +\infty)$. Сега намираме окончателно

$a \in \left(2; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)$.

От разработката се вижда, че сме приложили програмата Excel само за уравнения, чиито корени са реални числа. Въпреки това използването на програмата Excel при решаване на показателни уравнения дава възможност за:

- демонстрация на техники за автоматизиране на процеса на решаване на показателни уравнения;
- активизиране дейността на учениците;
- събуждане на интереса на учениците към математиката;
- ориентиране в спецификата на показателните уравнения;
- даване на насоки за търсене на алгебрично решение и проверка на получени резултати;
- разнообразяване на работата в клас.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Borodulja, I. (1968) *Exponential and logarithmic equations* (in Russian). Moscow: Prosveshtenie.
- Vavilov, V. et al. (1987). *Mathematics problems* (in Russian). Moscow: Nauka.
- Zapryanov, Z., V. Vakarelova & B. Dimitrov(1994). *Algebra for 10-th grade* (in Bulgarian). Sofia: Prosveta.
- Onova, M. & V. Milushev (1994). *Exponential equations and inequalities* (in Bulgarian). Plovdiv: Bojking.
- Paskalev, G. & Z. Paskaleva (2001). *Mathematics for 11-th grade* (in Bulgaria). Sofia: Archimedes.
- Penev, P. (2014a). Heuristics by Excel (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 57, 1, 18 – 33.
- Penev, P. (2014b). More Heuristics by Excel (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 57, 5, 5472 – 479.
- Penev, P. & D. Stefanova (2015). Individual problem solving by Excel (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 58, 2, 149 – 156.
- Rangelova, P. (2006). *Collection of mathematical problems for 9. – 12. Grades with Methodological Instructions* (in Bulgarian). Plovdiv: Makros.
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). One More Idea for Solving Trigonometric Equations (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 2, 170 – 182.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

EXCEL HELPS IN SOLVING SOME EXPONENTIAL EQUATIONS

Abstract. The paper proposes to include possibilities of the experimental environment of the program Excel in varying the problem solving of some groups exponential equations by secondary students.

✉ **Dr. Diana Stefanova**
Teacher in Mathematics
Asenovgrad, Bulgaria
E-mail: dianastefan@abv.bg

Mr. Plamen Penev
Teacher in Informatics
Shumen, Bulgaria
E-mail: plampenev@abv.bg