Educational Technologies
Образователни технологии

ЭПИЦИКЛОИДА

Инкар Аскар, Камила Сарсембаева
Областная специализированная школа-интернат
для одаренных детей с углубленным изучением
различных предметов – г. Актау

Аннотация. В данной статье представлены результаты исследования эпициклоиды, полученные учащимися из Казахстана в рамках международного сетевого проекта „Энциклопедия замечательных плоских кривых: пишем сами“. В исследованиях использовались методы аналитической геометрии и компьютерные эксперименты, которые проводились с использованием программ динамической геометрии GeoGebra или The Geometer's Sketchpad. Для организации сетевого взаимодействия участников использовались облачные сервисы Google.

Keywords: circle; curve; trajectory; epicycloid

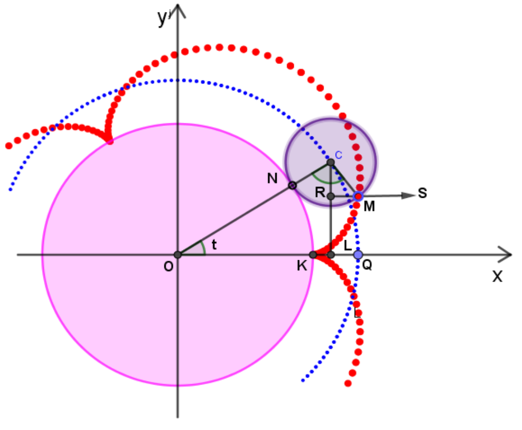
Результаты, которые будут представлены в данной статье, получены в рамках международного сетевого проекта „Энциклопедия замечательных плоских кривых: пишем сами“. Данный проект стартовал в конце сентябре 2017 года. Модераторами проекта являются ученые из трех российских вузов: Г. А. Клековкин (к.ф.м.н., доцент Самарского филиала ГАОУ ВО „Московский государственный педагогический университет“), А. В. Ястребов (к.ф.-м.н, д.п.н., профессор ФГБОУ ВО „Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского“) и В. Р. Майер (к.ф.-м.н, д.п.н., ФГБОУ ВО „Красноярский государственный педагогический университет имени В. П. Астафьева“. Ими были предложены для решения серии исследовательских задач, отнесенных к нескольким кривым. Мы решили выбрать для работы серию исследовательских задач, посвященную эпициклоиде.

1. Определение и некоторые исторические данные. Эпициклоида – (от греч. Epi – на, над, при, после, и kukloz – окружность, круг) – плоская кривая, которая представляет собой траекторию движения точки окружности, катящейся по другой окружности и имеющей с ней внешнее касание.

Начало систематического изучения эпициклоид и гипоциклоид было положено в 1525 г. знаменитым немецким художником Альбрехтом Дюрером (1471 – 1528) широко применявшим геометрические методы в изобразительном искусстве. В середине XVII века Ж. Дезарг (1593 – 1662), у которого глубина математических идей сочеталась с талантом конструктора, изучал свойства эпициклоид в связи с задачей создания зубчатых колес с наименьшим трением. Ла Гир, продолживший исследования Дезарга, опубликовал в 1675 г. „Трактат об эпициклоидах и их применении в механике“. В этом трактате установлен ряд важных свойств эпициклоиды (в частности свойства, приведенные в пунктах 7, 8, 10, 11, 14, 15).

В своем бессмертном труде „Математическое начало натуральной философии“ Ньютон обобщил исследования Гюйгенса о циклоидальном маятнике (§ 514, п. 17). Он установил что в сферическом поле тяготения линией изохронного колебания маятника является эпициклоида.

2. Параметрическое уравнение эпициклоиды. Выведем уравнения эпициклоиды. Поместим начало координат в центр неподвижного круга; ось OX направим по прямой, соединяющей этот центр O с точкой K, которая является начальным положением точки M, когда обе окружности касались друг друга в этой точке. Обозначим буквой r радиус катящейся окружности, через R – радиус неподвижной окружности и примем за параметр t угол, образуемый с осью OX радиусом ON неподвижной окружности, проведенным в точку касания окружностей, когда подвижная окружность повернулась на угол $\varphi = \measuredangle NCM$.



Ввиду того, что качение окружности происходит без скольжения, можем написать $\overset{\frown}{KN} = \overset{\frown}{NM}$, т.е. $Rt = r\varphi$, $\varphi = \dfrac{Rt}{r}$. Из чертежа непосредственно находим

$$x=\overline{OQ}=\overline{OL}+\overline{LQ}=\overline{OC}\cos\sphericalangle KOC-\overline{CM}\cos\sphericalangle SMC=$$

$$=\left(r+R\right)\cos t-r\cos\left(t+\varphi\right)=\left(r+R\right)\cos t-r\cos\frac{r+R}{r}t,$$

$$y=\overline{QM}=\overline{LC}+\overline{RC}=\overline{OC}\sin\sphericalangle KOC-\overline{CM}\sin\sphericalangle SMC=$$

$$=\left(r+R\right)\sin t-r\sin\left(t+\varphi\right)=\left(r+R\right)\sin t-r\sin\frac{r+R}{r}t.$$

Так получили следующие параметрические уравнения:

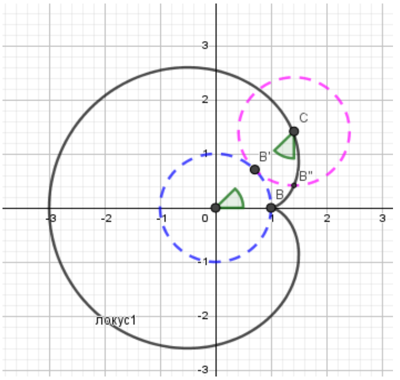
$$x=(r+R)\cos t-r\cos\left[(r+R)\frac{t}{r}\right],\ y=(r+R)\sin t-r\sin\left[(r+R)\frac{t}{r}\right].$$

3. Вид эпициклоиды при различных отношениях радиусов $\overline{m}=\dfrac{R}{r}$.

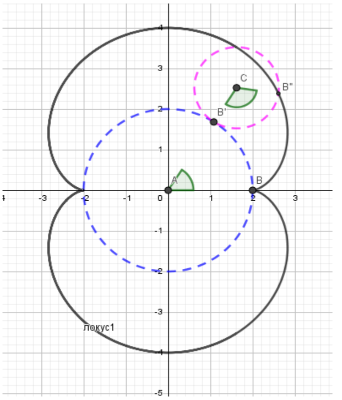
Форма эпициклоид определяется величиной $\overline{m}=\dfrac{R}{r}$. Если $\overline{m}=p/g$ (p и g – взаимно простые числа), точка M после g полных оборотов производящей окружности возвращается в исходное положение и эпициклоида – замкнутая кривая, состоящая из p ветвей с p точками возврата.

Эпициклоида при $\overline{m}=1$ называется *кардиоида*, а при $\overline{m}=2$ – *нефроида*.

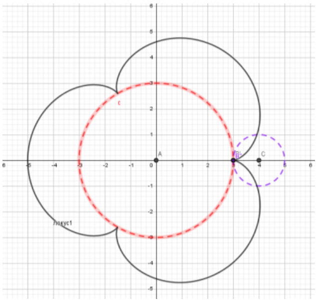
При $\overline{m}$ дробном ветви перекрещиваются. Если $\overline{m}$ иррациональное число, то ветвей бесконечно много, точка M в исходное положение не возвращается.



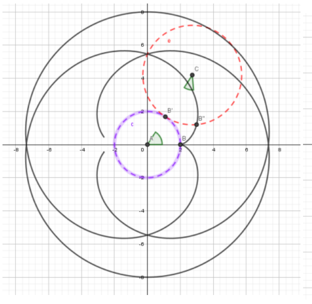
$\overline{m}=R:r=1:1$



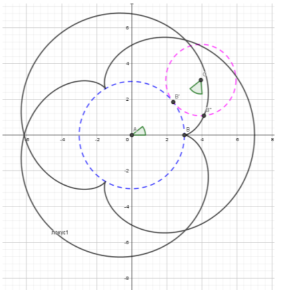
$\overline{m}=R:r=2:1$



$\overline{m} = R : r = 3 : 1$



$\overline{m} = R : r = 2 : 3$

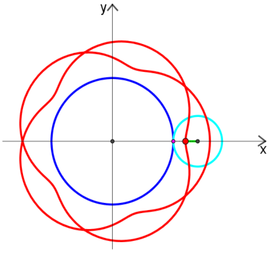


$\overline{m} = R : r = 3 : 2$

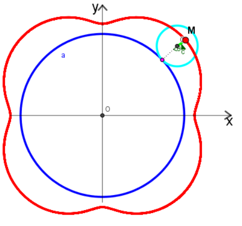
Так получаем следующий результат:

Теорема. *Эпициклоида представляет собой замкнутую кривую тогда и только тогда, когда радиусы подвижной и неподвижной окружностей соизмеримы.*

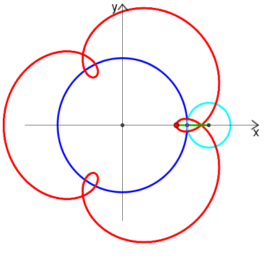
4. Эпитрохоиды. Можно поставит следующую задачу: Какова траектория точки, которая лежит внутри круга, катящегося по окружности и касающегося ее внешним образом и какова траектория точки, лежащей на продолжении радиуса окружности, которая катится по неподвижной окружности и касается ее внешним образом?



Укороченная эпициклоида



Укороченная эпициклоида



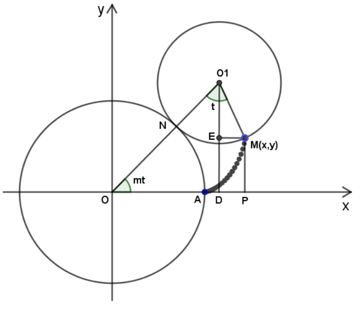
Удлиненная эпициклоида

Траектория точки, описанной в задаче, называется *эпитрохоидой*. На форму *эпитрохоиды* влияют *три параметра:* R – радиус неподвижной окружности, r – радиус катящейся окружности и h – расстояние от центра катящейся окружности до исследуемой точки. Если $h < r$, то трохоида называется *укороченной*, а если $h > r$, то *удлиненной*.

Пусть вычерчивающая точка на катящемся круге находится от его центра на расстоянии h. Параметрическое уравнение эпитрохоиды имеет вид

$$x=(R+mR)\cos mt-h\cos(t+mt)\ ,\ y=(R+mR)\sin mt-h\sin(t+mt)\,,$$

Где r – радиус катящейся окружности, R – радиус неподвижной окружности, $m=\dfrac{r}{R}$ – модуль, h – расстояние от вычерчивающей окружности до центра катящейся окружности.



В соответствии с рисунком имеем

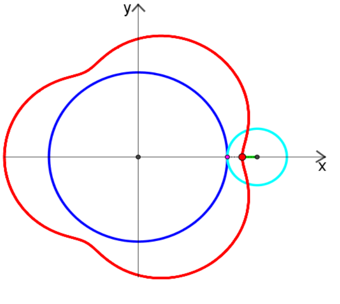
$$x=OP=OD+ME=(R+r)\cos mt+h\sin\sphericalangle MO_1E\,,$$
$$y=MP=O_1D-O_1E=(R+r)\sin mt-h\cos\sphericalangle MO_1E\,.$$

Кроме того,

$$\sin\sphericalangle MO_1E=\sin(t-\sphericalangle OO_1D)=\sin\left[t-\left(\frac{\pi}{2}-mt\right)\right]=-\cos(t+mt)\,,$$

$\cos\sphericalangle MO_1E=\sin(t+mt)$. Следовательно, параметрические уравнения имеют вид

$$x=(R+mR)\cos mt-h\cos(t+mt),\ y=(R+mR)\sin mt-h\sin(t+mt)\,.$$



$h<r$

$m=r:R=2:6$

5. Другие параметрические уравнения эпитрохоидой. Умножим второе из уравнений эпитрохоидой на мнимую единицу i. Складывая и вычитая эти уравнения, использую известные формулы Эйлера, получим

$$x \pm yi = \left(R + mR\right)e^{\pm mti} - he^{\pm(m+1)ti}.$$

Если положить $e^{ti} = \theta$, $x + yi = \xi$, $x - yi = \eta$, то

$$\xi = \left(R + mR\right)\theta^{m} - h\theta^{m+1},\ \eta = \left(R + mR\right)\theta^{-m} - h\theta^{-m-1}.$$

Так мы получили новые параметрические уравнения эпитрохоиды.

БЕЛЕЖКИ/NOTES

1. Сайт для организации сетевых исследовательских проектов по математике „Пишем сами“ (URL: https://sites.google.com/site/pisemsami/home).
2. Математическая энциклопедия. Т. 5. Москва: „Советская Энциклопедия“, 1984.

ЛИТЕРАТУРА/REFERENCES

Alexandrova, N. (2008). *Istoria matematicheskih terminov, ponyatii, oboznachenii. Slovar-spravochnik*. Moscow: LKI (in Russian) [Александрова, Н. (2008). *История математических терминов, понятий, обозначений. Словарь-справочник*. Москва: ЛКИ.]

Alexandrova, N. (1984). *Matematicheski termini*. Sofia: Nauka i izkustvo (in Bulgarian). [Александрова, Н. (1984). *Математически термини*. София: Наука и изкуство.]

Berman, G. (1980). *Cycloid*. Moscow: Nauka. (in Russian) [Берман, Г. (1980). *Циклоида*. Москва: Наука.]

Gellert, W., H. Kastner & S. Nueber (1983). *Matematicheski enciklopedichen rechnik*. Sofia: Nauka i izkustvo (in Bulgarian). [Гелерт, В., Х. Кестнер & З. Нойбер (1983). *Математически енциклопедичен речник*. София: Наука и изкуство.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes (in Bulgarian). [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Three notable points on the medians of the triangle*. Sofia: Archimedes 2000 (in Bulgarian). [Гроздев, С. & В., Ненков (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.]

Markushevich, A. (1952). *Notable curves*. Moscow: Gos. iz-vo teoretiko-tehnicheskoy literatury (in Russian). [Маркушевич, А. (1952). *Замечательные кривы*. Москва: Гос. изд-во теоретико-технической литературы.]

Savelov, A. (1960). *Ploskie krivy*. Moscow: Gos. iz-vo fiziko-matematicheskoy literatury (in Russian). [Савелов, А. *Плоские кривые*. (1960). Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы.]

Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU (in Russian). [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2017). Gaining new knowledge by computer experiments. *Journal of Educational Sciences & Psychology, vol. VII (LXIX), No 1B*. Special Issue – International Conference Education and Psychology Challenges – Teachers for the knowledge society – 4th edition, May, 122 – 125, ISSN 2247-6377. (ISSN online version 2247 – 8558).

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics*: The *Bulgaria Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).

Shabanova, M., R. Atamuratova. M. Belorykova, V. Nenkov & M. Pavlova (2016). The game "Geometry scrabble in cloud" an organizational form of the international student research groups. *Mathematics and education in mathematics, 45*, 223 – 228. (ISSN 1313-3330).

Shabanova, M., M. Belorykova, R. Atamuratova & V. Nenkov (2016). The First international set research project of secondary students in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 6*, 567 – 571 (in Russian). [Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков (2016). Первый международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 6*, 567 – 571.] (ISSN 1310-2230).

Vygotskii, M. Y. (1972). *Spravochnik po vyshei matematike*. Moscow: FIZMATLIT (in Russian). [Выгодский, М. Я. (1972). *Справочник по высшей математике*. Москва: ФИЗМАТЛИТ.]

Viletner, G. (1966). *Istoria matematiki ot Decarta do serediny XIX stoletia.* Moscow: Nauka (inRussian). [Вилетнер, Г. (1966). *История математики от Декарта до середины XIX столетия.* Москва: Наука.]

Shabanova, M., M. Belorykova, R. Atamuratova & V. Nenkov (2017). Second international set research student ptoject in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 5*, 457 – 465. (in Russian). [Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков (2017). Второй международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 5*, 457 – 465.] (ISSN 1310-2230).

EPICYCLOID

Abstract. The paper presents results on the epicycloid of Kazakhstan students in the frames of the net research project "Encyclopedia of notable plane figures: we work by ourselves". What are used in the investigation are analytical geometry methods and experiments by computer applying the software products GeoGebra and The Geometer's Sketchpad. The Google Cloud Service is used in the organization of the interaction between the participants.

✉ **Ms. Inkar Askar, Student**
Regional Special Boarding School
for Gifted Children with Profound
Studying of Different Subjects
32 b, Microdistrict
130 000 Aktau, Kazakhstan
E-mail: raisa_70_70@mail.ru

✉ **Ms. Kamila Sarsenbayeva, Student**
Regional Special Boarding School
for Gifted Children with Profound
Studying of Different Subjects
32 b, Microdistrict
130 000 Aktau, Kazakhstan
E-mail: ablaikhan_93.kz@mail.ru