

# „ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ“ – МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕТЕВОЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПРОЕКТ В РАМКАХ МИТЕ

<sup>1)</sup>Роза Атамуратова, <sup>2)</sup>Михаил Алфёров, <sup>3)</sup>Марина Белорукова,

<sup>4)</sup>Веселин Ненков, <sup>5)</sup>Валерий Майер, <sup>6)</sup>Генадий Клековкин,

<sup>7)</sup>Раиса Овчинникова, <sup>8)</sup>Мария Шабанова, <sup>9)</sup>Александр Ястребов

<sup>1)</sup>Областная специализированная школа-интернат для одаренных детей  
с углубленным изучением различных предметов – Актау (Казахстан)

<sup>2)</sup>Академия социального управления – Москва (Россия)

<sup>3)</sup>Средняя школа № 8 – Архангельск (Россия)

<sup>4)</sup>Высшая военноморская школа „Н. Й. Вапцаров“ (Болгария)

<sup>5)</sup>Красноярский государственный педагогический университет – Красноярск (Россия)

<sup>6)</sup>Самарский филиал Московского государственного педагогического университета (Россия)

<sup>7)</sup>Северный (Арктический) федеральный университет – Архангельск (Россия)

<sup>8)</sup>Московский центр развития кадрового потенциала образования – Москва (Россия)

<sup>9)</sup>Ярославский государственный педагогический университет – Ярославль (Россия)

**Аннотация.** Одной из задач международного проекта „Методики и информационные технологии в образовании (МИТЕ)“ является создание условий, побуждающих учащихся, учителей и ученых разных стран к взаимодействию в научных и образовательных целях. Интересной формой организации такого взаимодействия являются сетевые исследовательские проекты. Проект, начатый в 2018 г., направлен на создание открытой электронной энциклопедии плоских кривых. Для поддержки проекта был создан сайт „Пишем сами“, на котором ученые – модераторы разделов энциклопедии – выложили задания для исполнителей в форме статей-матриц. Исполнителями являлись команды учащихся трех стран – Болгарии, Казахстана и России, которые работали под руководством своих наставников. Данная статья описывает техническую и методическую работу всех тех, кто помогал учащимся в получении результатов.

**Keywords:** secondary education; network research project; crowd sourcing project; cloud services; dynamic mathematics system; experimental mathematics

## 1. Введение

Готовность к командной работе в сетевых сообществах для решения сложных задач (“collaborative problem solving”) является важной состав-

ляющей навыков и компетенций современного исследователя, которые определены процессами глобализации и информатизации. Этот факт отмечает руководитель международной группы в области оценки и преподавания навыков XXI века – проф. Патрик Гриффин<sup>1)</sup>. В 2015 г. Организация экономического сотрудничества и развития (OECD) в рамках программы PISA проводила исследование уровня сформированности данного навыка у 15-летних детей из 52 стран мира. Для проведения исследования данная компетенция была представлена системой базовых навыков совместной работы в сетевом сообществе, отнесенных к этапам решения сложных проблем. Для проверки использовались интерактивные колаборативные задания, выполняемые на компьютере (головоломки, достижение консенсуса, переговоры). В этом исследовании принимали участие и российские школьники. Их результаты были заметно ниже среднего по странам OECD, что объясняется отсутствием в программах обучения специальных условий для развития данной компетенции.

Сегодня группа проф. Гриффина (Griffin & Care, 2015) занимается разработкой педагогических сценариев, способствующих развитию данной компетенции. К их числу относятся и сетевые исследовательские проекты, организуемые для школьников на специально созданных для этого платформах. Большую работу по развитию практики сетевых исследовательских проектов для учащихся проводит компания Intel, которая имеет представительства во многих странах, в частности, в России. Образовательный проект „Обучение для будущего“<sup>2)</sup>, реализуемый этой компанией с 2002 г., уже сегодня привел к появлению портала „Путеводитель сетевых проектов“<sup>3)</sup> и раздела „Сетевые проекты“ на сайте сетевого сообщества учителей начальной школы<sup>4)</sup>.

Еще одной интересной инициативой является стартап „ГлобалЛаб“, – запущенный в 2013 г. при поддержке фонда „Сколково“<sup>5)</sup>. Он предлагает учащимся принять участие в краудсорсинговых проектах и исследований.

Термин „краудсорсинг“ вошел в научный оборот в 2006 г. благодаря статье Джекфа Хэя (Jeff Howe)<sup>6)</sup>. Он является производным от двух английских слов: crowd – толпа, sourcing – использование ресурсов. Главной особенностью краудсорсинговых проектов является их выполнение открытым сетевым сообществом, которое включает не только ученых-специалистов в данной области, но и любителей, желающих принять участие в решении научных, социальных или бизнес-задач.

Сетевой исследовательский проект, которому посвящена данная статья, преследовал достижение трех взаимосвязанных целей.

- **Проектная цель** – подготовка силами учащихся статей для „живых“ электронных математических энциклопедий и научных журналов.

- **Педагогическая цель** – предоставление учащимся и педагогам возможности приобретения опыта исследовательской математической деятельности в сетевом формате.
- **Организационная цель** – помочь педагогам в организации деятельности учащихся по подготовке исследовательских проектов в области математики.

Достижение этих целей было обеспечено благодаря двустороннему краудсорсингу. Одной из сторон послужил потенциал научных и научно-педагогических работников, аспирантов и студентов, который был использован для формирования у учащихся опыта исследовательской деятельности в области математики. Второй стороной послужил потенциал учащихся и учителей математики, который был использован в процессе решения учеными научно-исследовательских задач в области, относящейся не только к теории и методике обучения математике, но и самой математике.

Для организации работы на подготовительном этапе необходимо было распределить зоны ответственности между участниками проекта, их права и обязанности, четко прописать алгоритм их сетевого взаимодействия. Эта задача была решена путем введения специальных ролей: координаторы, модераторы, ассистенты модераторов, научные руководители, авторы статей.

**Координаторы проекта** имеют права администраторов сайта и облачного хранилища данных. Они размещают на сайте готовые материалы, информируют участников проекта о возможностях опубликования результатов в научных изданиях, участия в конкурсах исследовательских работ, инструктируют участников по работе с облачными сервисами, оказывают помощь в установлении и поддержании контактов.

**Модераторы** – это кандидаты и доктора наук, специалисты в области математики и математического образования. Они представляют на сайте свои разделы; имеют право открывать новые разделы; имеют право добавлять в разделы любые материалы, в том числе вводные статьи, статьи-матрицы, т.е. проектные статьи, включающие вводную информацию и задания для учащихся – авторов статей, дополнительные задачи, материалы, присланные участниками проекта и прошедшие проверку; могут просматривать и комментировать рабочие материалы учащихся, загруженные в облачное хранилище.

**Ассистенты модератора** – это аспиранты и студенты, привлеченные модераторами для создания вводных статей и статей-матриц, проверки представленных учащимися решений, консультирования участников проекта. Их права для работы с сайтом определяет модератор.

**Научные руководители** – это учителя математики, руководители ма-

тематических кружков, которые работают с учащимися в непосредственном контакте. Они оказывают помощь учащимся в выборе и понимании сути исследовательских задач (включая перевод текстов на национальный язык), определяют порядок работы в группе, консультируют и проверяют решения, выполняют представительские функции: представляют команду на сайте проекта, запрашивают у координаторов доступ к рабочим материалам раздела, размещают на облачном сервисе предложенные учащимися решения.

*Авторы статей* – это школьники, участвующие в проекте. Они выбирают задачи, которые предложены модераторами разделов, отправляют готовые материалы на проверку научному руководителю. Их права для работы с файлами и папками облачного хранилища определяет научный руководитель.

Участники проекта подключались к работе постепенно. Сначала была подготовлена и размещена вводная статья энциклопедии, которая имела целью раскрыть перед участниками замысел энциклопедии, познакомить с базовыми теоретическими положениями, историей вопроса, ввести в проблематику. Затем началась совместная работа модераторов по разработке оглавления энциклопедии и определению подходов к созданию статей-матриц. После размещения на сайте первых статей-матриц к проекту были подключены учащиеся и их научные руководители. Необходимый участникам инструктивный материал формировался постепенно, в соответствии с поступающими запросами: правила регистрации на облачном сервисе, работы с Google-диском, оформления статей, рецензирования работ.

## **2. Замысел сетевого исследовательского проекта „Энциклопедия замечательных плоских кривых“**

Объясним теперь, почему была поставлена задача создания открытой электронной энциклопедии именно замечательных плоских кривых. Основных причин три.

Во-первых, знакомство с плоскими кривыми и исследование их свойств открывает дверь в удивительно разнообразный мир плоских линий, встречающихся в различных областях математики и ее приложениях. Первые представления о таких линиях учащиеся получают еще в школе при изучении графиков элементарных функций в курсе алгебры и начал анализа, траекторий движения материальных точек в курсе физики, геометрических мест точек в курсе геометрии. Если после окончания школы они собираются продолжить свое математическое образование, то в вузовских курсах математики они неизбежно столкнутся со многими линиями, которые войдут в энциклопедию. Таким образом, участие в создании энциклопедии служит пропедевтикой последующего систематического

изучения кривых в вузе.

Во-вторых, плоские кривые и их свойства весьма эффективно могут быть представлены посредством динамических иллюстраций. Модераторы предлагают участникам проекта подключиться к созданию таких иллюстраций на основе использования систем динамической математики (GeoGebra). Организаторы проекта считают, что создание динамических чертежей плоских кривых и изучение с их помощью свойств кривых позволит обучающимся быстро, осознанно и достаточно полно освоить инструментальные возможности этого программного обеспечения. Полученные при этом навыки работы с системами динамической математики позволяют в дальнейшем активно и продуктивно использовать их в научных и образовательных целях.

В-третьих, изучение плоских кривых позволит участникам проекта осмыслить глубокие связи алгебры и геометрии, так как чисто геометрической или чисто аналитической подходы весьма ограничены. Работая над энциклопедией, учащиеся естественным образом вынуждены расширять свои знания в области аналитической геометрии. Они знакомятся с неявными уравнениями плоских кривых, параметрическим способом их задания, полярной системой координат и т.д. Они осваивают новые области применения знаний основ математического анализа, например, получают уравнения касательных и нормалей к кривым, уравнения асимптот. Кроме того, они разыскивают особые точки кривых – изолированные точки, точки самоприкосновения, возврата, узловые точки.

### **3. Техническое обеспечение сетевого взаимодействия участников проекта**

Для поддержки сетевого взаимодействия участников проекта были выбраны сервисы Google:

GoogleMyMaps – для создания карты участников сетевого проекта;

GoogleGroups – для организации обсуждения наиболее значимых тем в ходе реализации проекта;

GoogleDocs – для совместной работы над статьями энциклопедии;

GoogleSites – для представления широкой общественности сути проекта, условий участия в нем, хода и его результатов, т.е. готовых статей электронной энциклопедии.

Выбор выделенных сервисов не был случайным. Сервисы Google дают возможность быстро организовать общее рабочее онлайн-пространство для участников проекта на принципах wiki-технологии. Кроме того, документы Google имеют интерфейс, сходный с Microsoft Word, Power Point и Excel. Это облегчает их освоение и использование участниками проекта.

Структура созданного сайта<sup>7</sup> приведена на рис. 1.

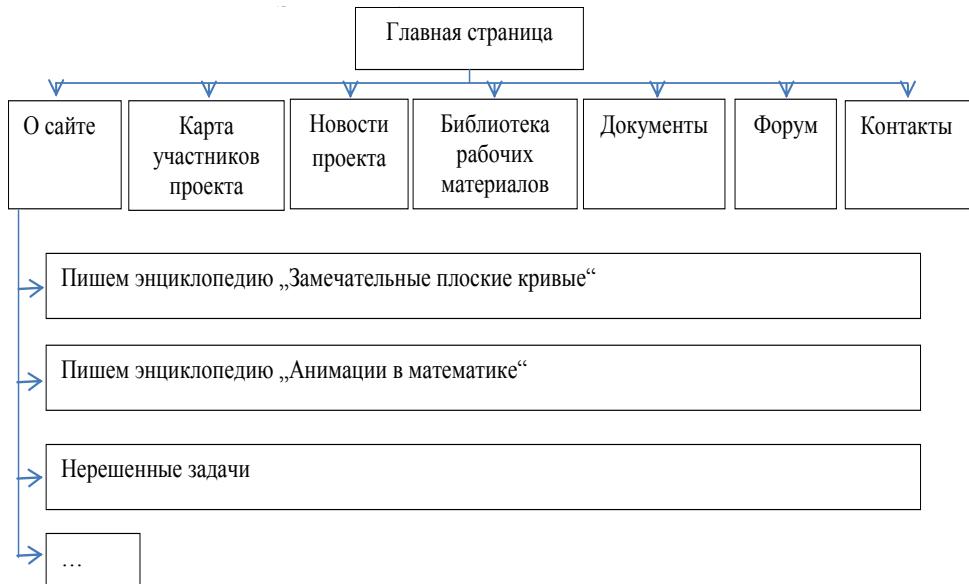


Рис.1. Структура сайта проекта

Многоточие в нижнем блоке показывает, что перечень реализуемых при поддержке сайта проектов не ограничен. Создавая новые страницы, модераторы разделов и подразделов могут инициировать новые проекты или развивать структуру имеющихся.

Всем страницам сайта на GoogleDisk соответствует одноименная папка (папка страницы), которая может быть структурирована, исходя из особенностей размещаемой в ней информации. Например, в папке „Энциклопедия „Замечательные кривые“” накапливаются материалы коллективных статей (см. п. 6). На каждый тип кривой на GoogleDisk в папке страницы создается отдельная подпапка, в которой размещаются:

- статья-матрица;
- подпапка „Статьи на рецензию“, которая формируется научным руководителем проекта;
- подпапка „Статьи, прошедшие рецензию“, которая формируется модератором проекта, т.е. автором статьи-матрицы;
- таблица продвижения, которая заполняется научным руководителем проекта и отражает активность учащихся в проекте.

Процесс формирования содержимого папки реализуется по достаточно просто-му сценарию, не требующему особой квалификации и состоящему из трех шагов:

1. научный руководитель размещает статью, подготовленную его группой, в подпапке „Статьи на рецензию“;
2. модератор, получив по почте уведомление о размещении, открывает соответствующую статью и редактирует её; все правки видны научному

руководителю; модератор и научный руководитель могут обмениваться сообщениями непосредственно в документе Google;

3. по завершению редактирования модератор вставляет отредактированный текст в соответствующее место статьи-матрицы (каждая статья, размещаемая научным руководителем, посвящена определенной задаче, описанной в статье-матрице; под этим описанием размещается статья).

Таким образом, происходит „сборка“ итоговой статьи из множества отдельных статей, создаваемых отдельными группами.

Содержание папки „Анимация в математике“ структурируется по следующим направлениям:

- описание создания анимационных рисунков для исследований и экспериментов по решению исследовательских задач;
- описание методики использования анимационно-дидактического материала на уроках математики;
- учебные фильмы, демонстрирующие анимационное решение задачи, использование анимационного материала на уроках математики;
- специализированные подборки анимационно-дидактического материала по отдельным предметам, классам и темам как школьной, так и вузовской математики.

Следует отметить, что предлагаемая платформа взаимодействия ориентирована, прежде всего, на поддержку процесса взаимодействия и эффективна в той степени, в которой участники проекта владеют соответствующими технологиями. Для участников, не владеющих данной технологией, она может оказаться трудоемкой и не вполне удобной. В связи с этим в настоящее время исследуются альтернативные платформы поддержки сетевого взаимодействия.

#### **4. Обучение написанию энциклопедических статей и взаимодействие участников проекта**

Организационная особенность данного сетевого проекта (как и многих других сетевых проектов) состояла в большой удаленности друг от друга модераторов проекта и его авторов. В этих условиях естественным средством общения между ними служили тексты, подготовленные модераторами и размещенные на сайте. Каждый такой текст выполнял несколько функций, причем такая многофункциональность была неизбежной. Прежде всего, текст задавал предмет рассмотрения. Кроме того, он содержал конкретные задания и минимальные советы по их выполнению. Наконец, он задавал общую структуру будущей *коллективной* статьи, написанной, быть может, школьниками из разных стран.

Тексты модераторов были реализованы в виде так называемых статей-матриц. Статья-матрица содержала определение конкретной кривой

и серию задач, последовательное решение которых образовывало программу исследования. Предполагалось, что решения задач, найденные и оформленные школьниками, будут составлять окончательный текст статьи в конструируемой энциклопедии.

Опишем структуру статьи-матрицы „Циклоида“, акцентируя то обстоятельство, что разные задачи статьи выполняли разные функции, реализующие разные цели проекта в целом. По необходимости наше описание будет кратким. В частности, мы опустим некоторые задачи, сохранив, однако, их нумерацию.

**1. „Каковы параметрические уравнения циклоиды?“**

Очевидно, что перед школьником стояла чисто литературная задача: отыскать уравнения в литературе, перенести их в свой текст с помощью редактора формул, объяснить смысл каждого символа, грамотно сослаться на источник информации. Отметим, что даже эта простая задача вызывала определенные затруднения.

**2. „Как вывести параметрические уравнения? (Укажите один или несколько источников информации, отметив наиболее доступные из них)“.**

Предыдущая литературная задача дополнялась поиском *нескольких* источников информации и их *сравнением* по признаку доступности. Впрочем, уже на этом (начальном) уровне у школьников появлялось возможность проявить самостоятельность. Действительно, сравнив источники по признаку их доступности, было бы естественно сравнить по уровню понятности изложения, по качеству чертежей и проч. *Таким образом, задачи 1 и 2 выявляют гуманистарное, просветительское начало проекта в целом.*

**4\*. „Постройте динамический чертеж, на котором будет видна циклоида как траектория точки“.**

Очевидно, что динамические чертежи отсутствуют в литературе на бумажном носителе. Школьникам придется либо сделать чертеж *самостоятельно*, либо отыскать его в интернет-источниках, проявив при этом чрезвычайно хорошее знакомство с ними.

**5. „Какова траектория точки, которая лежит внутри круга, катящегося по прямой?“?**

**6\*. „Сформулируйте и решите задачи 1–4 применительно к точке из задачи 5“.**

Очевидно, что задача 5 вновь является чисто литературной. В отличие от нее, задача 6 носит научный характер, поскольку предполагает *самостоятельную формулировку четырех задач и их решение. Таким образом, в задачах 4 и 6, отмеченных звездочками, начинает выявляться научное начало проекта в целом.*

**10\*.** „Вы знаете, что автомобиль может буксовать. Придумайте разумное определение пробуксовки и коэффициента пробуксовки. Выясните, какова траектория точки на окружности, которая катится по прямой с постоянным коэффициентом пробуксовки“.

**13\*.** „Сформулируйте и решите задачи о треугольнике Рёло, которые аналогичны предыдущим задачам о качении окружности“.

Задачи 10 и 13 представляют собой серьезные математические задачи. Так, в задаче 10 нужно *самостоятельно сформулировать определение* коэффициента пробуксовки, которое не встречалось авторам в литературе, а затем доказать его целесообразность путем выявления каких-либо интересных свойств траектории. Задача 13 требует от школьников найти точки соприкосновения двух разных областей знания: кривых качения и кривых постоянной ширины. Вновь отметим, что авторам не встречались параметрические уравнения траектории точки на катящемся треугольнике Рёло. *Таким образом, задачи 10 и 13 выявляют математическое начало проекта в целом.*

**14\*.** „Если вы считаете, что циклоида обладает дополнительными свойствами, которые заслуживают внимания, напишите статью об этих свойствах“.

Задача 14, незаметная на первый взгляд, открывает для школьников и их научных руководителей весьма широкое поле самостоятельной деятельности и позволяет выйти далеко за те рамки, которые были очерчены статьей-матрицей. *Тем самым выявляется творческое начало проекта в целом.*

На первый взгляд, трудно найти какое-то новое для школьников свойство циклоиды, однако при ближайшем рассмотрении это не так. Например, школьники могли бы доказать, что если радиус катящейся окружности равен 1, то ни одно острое циклоиды, кроме начального, не может иметь рациональную абсциссу. Это простое наблюдение порождает многие вопросы, например, такие: каким должен быть радиус окружности, чтобы несколько точек минимума циклоиды имели рациональную абсциссу? если такой радиус существует, то у скольких точек минимума абсцисса окажется рациональной? И так далее.

Кратко опишем некоторые особенности общения модератора со школьниками, которые имели место в процессе выполнения заданий из статей-матриц.

Очевидно, что в течение многих лет школьники читают учебники и другие книги различного назначения. Все они представляют собой тексты, обладающие определенными свойствами: тексты написаны шрифтом одного размера, отформатированы по ширине, имеют постоянный абзацный отступ, постоянный межстрочный интервал, нулевой интервал меж-

ду абзацами. Для модераторов оказалось неожиданным, что в первичных текстах авторов *все* эти пять стандартных требований были нарушены. К тому же часть математических символов была написана в редакторе формул, а другая часть – обычным латинским шрифтом. В целом первичные тексты были настолько дисгармоничными, что не могли служить предметом публичного рассмотрения. Пришлось приложить большие усилия в виде неоднократного возвращения статей на доработку, прежде чем стандартные требования были поняты и соблюдены. Таким образом, пользуясь всеми удобствами стандартного оформления текстов, школьники совсем не понимали его общей структуры, и только потребность создать собственный продукт приводила к его осмыслению. По-видимому, здесь мы столкнулись с проявлением общей ситуации: пользуясь телефоном или телевизором, люди, как правило, не знают ни структуры современной телефонии, ни принципа работы телевизора.

Весьма часто встречались недостатки композиционного характера. Так, параметрические уравнения циклоиды могли встретиться *дважды* в одном тексте. При этом ни в одном случае смысл обозначений не был объяснен, а одна и та же величина имела разные обозначения. Например, при одном цитировании радиус окружности и угол ее поворота обозначались через *R* и *t* соответственно, а при другом цитировании – через *a* и *φ*. Приходилось объяснять разницу между цитированием и механическим копированием, а также указывать на ненужность двукратного извлечения одной и той же формулы из разных источников.

Встречались и курьезные недостатки. Так, в двухстраничном тексте авторов могла появиться ссылка на „формулу (36)” или „рисунок 94”, как если бы 35 формул и 93 рисунка были написаны ранее.

Впрочем, когда школьники осознавали, что они делают общественно значимый продукт, подлежащий публичному рассмотрению, их тексты становились вполне достойными.

## **5. Обучение анализу и систематизации данных о плоских кривых**

Одна из важных задач проекта состояла в обучении учащихся работе с *разнородной* информацией. Этот вид деятельности как нельзя лучше подходил для решения данной образовательной задачи, так как энциклопедия – это особый вид справочного издания, содержащий в обобщенном виде основные научные сведения об объектах изложения<sup>8)</sup>. Статьи энциклопедии имеют характер обзорных. Они должны представить в сжатом виде основные известные науке сведения об объекте изложения с указанием вклада отдельных ученых в их получении и истории постановки исследовательских задач. Умение готовить обзорные статьи является исключительно важным как для продолжения образования, так и для профессиональной деятельности, так как они составляют стандартную часть

квалификационных работ (курсовых работ, дипломных проектов, диссертаций), часто включаются в пакет документов для подачи заявки на грант или патент.

Сложность создания математических обзоров состоит в необходимости приведения фактов, заимствованных из разных источников, к единой системе понятий и символических обозначений, в решении вопросов об определении оптимального уровня строгости изложения (научная статья или научно-популярная), степени следования дедуктивному построению математической теории, совмещении такого построения с обзором истории научных открытий.

Важной составляющей такой деятельности является критический анализ информации, заимствованной из *ненадежных* источников, которых немало в сети Интернет. Именно с обучения учащихся сравнительному и критическому анализу заимствованной информации мы и начали свою работу. Покажем ее на примере подготовки статьи „Улитка Паскаля“.

Первым заданием, которое получили ученики, было найти источники, содержащие информацию об определениях и алгебраических способах задания кривой. Для обеспечения корректности заимствований была выдана форма для заполнения, включающая следующие разделы: библиографическое описание источника, точка доступа, цитата, страницы ее размещения в источнике. По ходу выполнения задания учитель стимулировал учеников к расширению границ поиска, т.е. к варьированию поисковых запросов, к работе в школьных и городских библиотеках. В результате подходящая информация была найдена в разнотипных источниках: учебниках геометрии (Smirnova & Smirnov, 2007), дополнительных главах к учебникам математики (Vilenkin et al., 1996), справочниках и учебных пособиях по аналитической геометрии для вузов (Vigotski, 1977), научно-популярном журнале „Квант“<sup>9)</sup> и др.

Результатом индивидуальной работы по поиску информации стал отчет учащихся о стратегии и результатах поиска информации: как были сформулированы вопросы по запросу информации, как были определены источники информации, как была найдена подходящая информация, как определялась ее точность и достоверность, были ли соблюдены этические нормы в области информационных технологий (уважение принципов интеллектуальной свободы и прав на интеллектуальную собственность, указание верных ссылок, цитирование чужих идей).

Анализ, сортировка и отбор нужной информации осуществлялся в рамках групповой работы. Здесь учащиеся должны были произвести сравнение уравнений кривой, заимствованных из различных источников. Например, полярное уравнение улитки Паскаля в источнике (Vigotski, 1977) имеет вид  $\rho = a \cos \varphi + l$ , а в источнике<sup>10)</sup> – другой вид:  $\rho = l - a \sin \varphi$ .

На этом этапе работы исполнители проекта учились ставить и отвечать на следующие вопросы.

- 1) Как отделить источники с надежными данными от источников с не-надежными данными?
- 2) Верно ли уравнение, приведенное в Википедии?
- 3) Как доказать, что найденные в различных источниках уравнения являются правильными?
- 4) Если существуют различные уравнения, задающие улитку Паскаля, то как описать их множество?
- 5) Каков геометрический смысл коэффициентов  $a$  и  $l$ ?
- 6) Как меняется вид улитки Паскаля в зависимости от коэффициентов  $a$  и  $l$ ?

Выдвижение гипотез осуществлялось посредством выделения общих свойств объектов, нахождения закономерностей, высказывания предположений о возможности использовать определенные теоретические знания для ответа на поставленные вопросы. На этом этапе рассматривались любые предлагаемые для рассмотрения гипотезы, даже самые абсурдные. Подтверждали или опровергали их сами учащиеся. Замечания типа „это неправильный ответ“, „твоя гипотеза неверна“, „такая формулировка не нравится“, „этого не может быть“ не допускались.

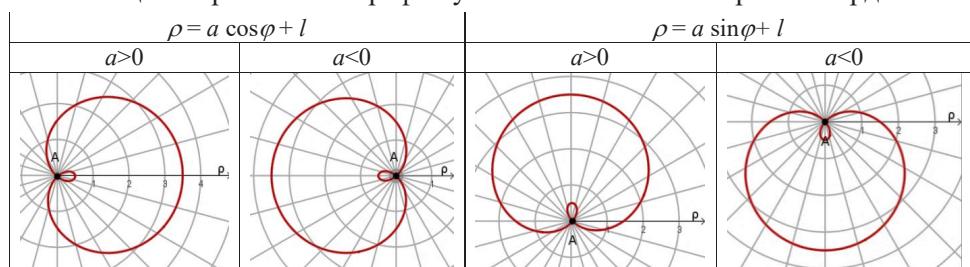
Проверить гипотезы и ответить на поставленные вопросы помогало использование интерактивной математической среды GeoGebra, позволяющей выводить на экран полярную систему координат, строить точку по ее полярным координатам, например,  $(a \cos \varphi + b; \varphi)$  и с помощью команды Локус получать изображение искомой кривой. Использование интерактивных математических сред предоставило возможность не только проверить выдвинутые гипотезы, но и сгенерировать новые. Например, вопросы „А как изменится улитка Паскаля, если к углу  $\varphi$  прибавить какой-либо угол  $\alpha$ ?“, „Можно ли записать уравнение улитки Паскаля от комплексных переменных?“ появились только после того, как с помощью GeoGebra были экспериментально проверены гипотезы и оценены учащимися ее исследовательские возможности.

При планировании эксперимента учащиеся учились строить динамические модели кривых для дальнейшего их исследования. Решались, например, такие проблемы.

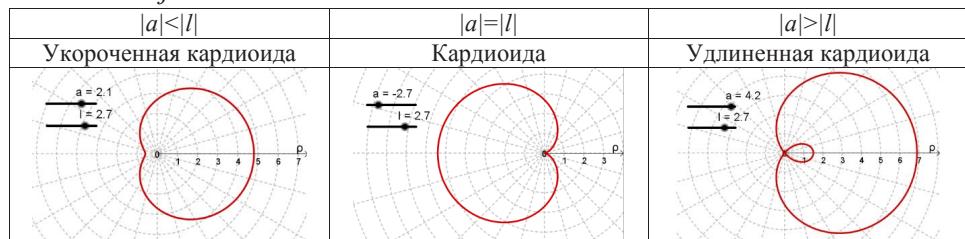
- 1) Как построить модель, чтобы рассмотреть все частные случаи и предельные положения?
- 2) Каким образом будет происходить изменение числовых данных?
- 3) Как изменить какие-либо параметры?
- 4) Как провести эксперимент, чтобы он не был хаотичным, лишенным логики?

В результате построения динамического чертежа для ответа на вопрос „Как меняется вид улитки Паскаля в зависимости от коэффициентов  $a$  и  $l$ ?” и исследования полученной модели, была получена зависимость расположения улитки Паскаля от вида уравнения и значений коэффициента  $a$ , объяснен поворот кривой на угол  $90^\circ$  и произвольный угол  $a$ . Для визуального представления обнаруженных в ходе исследования свойств, связей, соотношений и закономерностей полученная информация систематизировалась учащимися в виде таблиц с использованием построенных в GeoGebra графиков и формул (см. табл. 1 и 2).

**Таблица 1.** Уравнение и график улитки Паскаля в полярных координатах



**Таблица 2.** Вид улитки Паскаля в зависимости от коэффициентов уравнения  $r = a \cos \varphi + l$



## 6. Обучение созданию динамических моделей и использованию компьютерных экспериментов в решении исследовательских задач

Одно из наиболее значимых и уникальных дидактических достоинств систем динамической геометрии – это предоставление обучающимся возможности самостоятельно создавать динамические модели геометрических (и не только) объектов и проводить их исследования с помощью компьютерных экспериментов. Именно по этой причине целый ряд задач, которые формулировались модераторами в статьях-матрицах, ориентированы на создание школьниками динамических чертежей с последующим исследованием их экспериментальными и теоретическими методами. Отметим, что конструирование динамической модели в соответствии

с условием поставленной задачи тоже представляет собой творческую деятельность с элементами исследования, по результатам которой можно судить о понимании школьниками сути задачи, об их умении мыслить нестандартно и проявлять геометрическую изобретательность, о предпочтении тех или иных областей математики.

В качестве примера кратко прокомментируем работу школьников в соответствии с задачами статьи-матрицы „Улитка Паскаля“.

Статья-матрица „Улитка Паскаля“ содержит семнадцать задач, первые пятнадцать из которых можно условно разбить на восемь блоков. Каждый блок посвящён одному из известных способов построения данной кривой:

- как конхоиды окружности;
- как подэры окружности;
- с помощью уравнения (параметрического, алгебраического, полярного);
- кинематическим методом с помощью эпициклоиды;
- кинематическим методом с помощью шарнирного параллелограмма;
- с помощью вышивания окружностями;
- с помощью вышивания на „пяльцах“;
- как инверсный образ линии второго порядка.

Ясно, что один из способов построения улитки Паскаля необходимо принять за определение. В статье-матрице было предложено определение этой кривой как конхоиды окружности, т.е. с помощью откладывания на всевозможных прямых, проходящих через фиксированную точку окружности, по обе стороны от вторых точек пересечения прямых с окружностью отрезков данной длины. Школьники предпочли определение улитки Паскаля как эпициклоиды модуля один. Несмотря на то, что такой выбор хоть и незначительно, но влиял на логику и последовательность решения задач в статье-матрице, научный руководитель и модератор не возражали против этого.

Далее, в каждом из восьми блоков школьникам предлагалось построить динамическую модель кривой, произвольная точка которой удовлетворяла определённым условиям, проверить модель на устойчивость этим условиям, описать алгоритм построения. Это – первый шаг исследования. Вторым шагом надо было провести эксперимент и сформулировать гипотезу о том, модель какой кривой построена. И, наконец, последний, третий шаг: перевести сформулированное утверждение из разряда гипотез в разряд теорем, т.е. доказать, что построенная динамическая кривая представляет собой улитку Паскаля.

Интересно, что наименьшую трудность у школьников вызывал третий шаг. При доказательстве сформулированной гипотезы выкладки как в одну, так и в другую сторону проводились, за редким исключением,

достаточно корректно. Проблемным оказался первый шаг, вернее та его часть, где требовалось провести описание алгоритма. По всей видимости, наличие статического рисунка-чертежа в статье являлось, по мнению школьников, аргументом того, что с алгоритмом у них всё в порядке и нет необходимости тратить текст статьи на его описание. К сожалению, внешне безупречный динамический чертёж не всегда выдерживает проверку на устойчивость. Приведём пример компактного описания алгоритма построения улитки Паскаля как конхоиды окружности: строится произвольная окружность и отрезок  $a$ ; на окружность помещаются точки  $A$  и  $B$  строится прямая  $AB$ ; на прямой  $AB$  по обе стороны от  $B$  откладываются отрезки, равные  $a$  (для этого достаточно построить окружность с центром  $B$  и радиуса  $a$ , найти ее пересечение с прямой  $AB$ ); для концов  $C$  и  $D$  этих отрезков задаётся опция **Оставлять след**, для точки  $B$  – **Анимировать**. В результате перемещения  $B$  по окружности точки  $C$  и  $D$  вычерчивают требуемую кривую. Если воспользоваться командой **Локус**, то на экране появится изображение линии, которую можно успешно исследовать, меняя радиус окружности и длину  $a$  отрезка.

Приведённое выше описание алгоритма построения достаточно очевидно. Гораздо большую изобретательность следовало проявить при построении улитки Паскаля с помощью шарнирного параллелограмма, вышивания окружностями, вышивания на „пяльцах“, как инверсный образ линии второго порядка, а также при доказательстве эквивалентности определений. Однако школьники выбрали несколько иное, аналитическое продолжение своего исследования. Им удалось найти новый (неизвестный до этого) способ построения улитки Паскаля на комплексной плоскости как образа единичной окружности при отображении комплексной плоскости, задаваемом многочленом второй степени  $w = z^2 + k(1 + i)z$  от комплексного переменного  $z$ , модуль которого равен 1, а параметр  $k$  равен длине отрезка  $a$  из описанного выше алгоритма построения улитки Паскаля как конхоиды окружности. При этом если параметр  $k = 2$  (двум радиусам окружности), то полученная линия является кардиоидой; при  $|k| > 2$  получается укороченная кардиоида, а при  $0 < |k| < 2$  – удлинённая кардиоида (рис. 2). При  $k = 0$  „очерк“ и „петля“ удлинённой кардиоиды совмещаются, и она превращается в окружность.

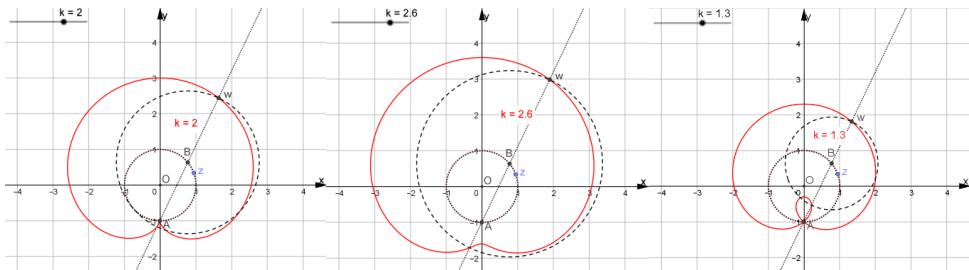


Рис. 2. Вид „Улитки Паскаля“ в зависимости от параметра  $k$

Корректность этого построения была ими обоснована, а алгоритм построения реализован в среде GeoGebra. В статье высказано предположение, что таким свойством обладает любой многочлен второй степени от комплексного переменного.

По содержанию статьи школьников видно, что ее авторы более комфортно чувствуют себя в аналитических выкладках и тождественных преобразованиях, чем в тонкостях построения геометрических конфигураций. Об этом свидетельствуют и безупречно проведённые в статье исследования по изучению формы и вида улиток Паскаля при изменении задающих их параметров.

### 7. Заключительные замечания

Подводя промежуточные итоги, отметим, что наиболее трудными для школьников и их руководителей оказались задачи научного характера. Так, при изучении циклоиды никто не взялся за задания с пробуксовкой или с треугольником Рёло, никто не предложил новых свойств кривой, не предусмотренных статьей-матрицей. При изучении улитки Паскаля никто не взялся за решение задачи 16 о трисекции угла с ее помощью, никто не взялся за решение задачи 17 о ее практических приложениях в технике. Справедливости ради скажем, что эти задания действительно являются сложными и трудными с точки зрения авторов статьи.

С другой стороны, школьники сумели с блеском построить ряд динамических чертежей, справились с самостоятельной формулировкой и решением ряда задач, предложили оригинальный способ построения улитки Паскаля на комплексной плоскости. Таким образом, проект в определенном смысле остается открытым, причем его участники имеют интеллектуальный потенциал, достаточный для его успешного завершения.

## NOTES/БЕЛЕЖКИ

1. Гриффин, П. „Навыки XXI века“: новая реальность в образовании. Официальный сайт [Griffin, P. “Habits in 21<sup>st</sup> Century”: new reality in education. Official website] (URL: [http://erazvitie.org/article/navyki\\_xxi\\_veka\\_novaja\\_realnost](http://erazvitie.org/article/navyki_xxi_veka_novaja_realnost)).
2. Проект „Обучение для будущего“: официальный сайт [Project “Education for the future”: official website] (URL: <https://www.intel.ru/content/www/ru/ru/education/intel-education.html>).
3. Путеводитель сетевых проектов [Guide for network projects] (URL: <https://sites.google.com/site/putevoditelusp/o-etom-sajte>).
4. Сетевые проекты для начальной школы в 2018 – 2019 году// сайт Nachalka.ru [Network projects for primary school in 2018 – 2019// website Nachalka.ru] (URL: [http://www.nachalka.com/network\\_projects](http://www.nachalka.com/network_projects)).
5. Стартап „ГлобЛаб“: глобальная школьная лаборатория. Официальный сайт проекта [Startup “GlobLab”: global school laboratory. Official website of the project] (URL: <https://globallab.org/ru/#.W2LK-VAzbIU>).
6. Jeff Howe. The Rise of Crowdsourcing//Wired, 06.01.2006. (URL: <https://www.wired.com/2006/06/crowds/>).
7. Сайт проекта „Пишем сами“ [Website of thy project “PsemSami”] (URL: <https://sites.google.com/site/pisemsami/home>).
8. ГОСТ Р 7.0.14–2011 „Справочные издания. Основные виды, структура и издательско-полиграфическое оформление“ [GOST R 7.0.14–2011 “Guiding editions. Basic types, structure and edit-polygraphic design”] (URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200093841>).
9. Архив номеров Кванта. [Quant issues Archives.] (URL: <http://kvant.mccme.ru>).
10. Улитка Паскаля//Википедия [Limaçon (Pascal's snail)//Wikipedia] (URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Улитка\\_Паскаля](https://ru.wikipedia.org/wiki/Улитка_Паскаля)).

## REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Griffin, P. & E. Care (2015). *Assessment and Teaching of 21st Century Skills: Methods and Approach*. Springer.

Smirnova, I. M. & Smirnov, V. A. (2007). *Geometry 7 – 9 grades: textbook for general-educational institutions*. Moscow: Mnemozina, 376 p. [Смирнова, И. М. & В. А. Смирнов (2007). *Геометрия 7 – 9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений*. Москва: Мнемозина, 376 с.]

Vilenkin, N. Y. et al. (1996). *Beyond the pages of the Mathematics textbook: Number Theory, Algebra, Geometry: Textbook for 10 – 11 grades of general-educational institutions*. Moscow: Prosveshtenie: AO „Educational literature”, 320 p. [Виленкин, Н. Я. и др. (1996). *За стра-*

ницами учебника математики: *Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. для учащихся 10 – 11 кл. общеобразоват. учреждений*. Москва: Просвещение: АО „Учеб. Лит.”, 320 с.]

Vigotski, M. Y. (1977). *Manual on Higher Mathematics. 12<sup>th</sup> edition*. Moscow: PHIZMATLIT, 870 p. [Выгодский, М. Я. (1977). *Справочник по высшей математике. 12-е изд.* Москва: ФИЗМАТЛИТ, 870 с.]

## ENCYCLOPEDIA OF NOTABLE PLANE CURVES AN INTERNATIONAL NETWORK RESEARCH PROJECT WITHIN THE FRAMES OF MITE

**Abstract.** Creation of conditions to motivate students, teachers and scientists from different countries by including them in a network is one of the goals of the International project “Methods and Information technologies in educations” (MITE). Crowd sourcing for a research project is an interesting form for the purpose. The project began in 2018 and was directed to the elaboration of an open electronic encyclopedia of plane curves. A website “We write by ourselves” was created to support the project. Scientists were the moderators of the encyclopedia topics. They formulated problems in articles-matrices. The participants in the project tried to solve the problems and wrote articles too. They were grouped in teams consisted of students from three countries – Bulgaria, Kazakhstan and Russia. Their mentors were school teachers. The present article describes the technical and methodological work of those who helped students to obtain results.

✉ **Ms. Roza Atamuratova, teacher**  
Regional Special Boarding School for Gifted Children  
with Profound Studying of Different Subjects  
32 b, Microdistrict  
130000 Aktau, Kazakhstan  
E-mail: r.atamuratova@mail.ru

✉ **Mr. Mikhail Alferov**  
Academy of Public Administration  
3, Enisseyskaya St.  
129344 Moscow, Russia  
E-mail: alferov1963@yandex.ru

✉ **Ms. Marina Belorukova, teacher**  
Public Secondary School № 8  
30, Avenue Obvodni kanal  
163002 Arkhangelsk, Russia  
E-mail: marina.9149@yandex.ru

 **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**  
“Nikola Vaptsarov” Naval Academy  
Varna, Bulgaria  
E-mail: vnenkov@mail.bg

 **Prof. Valery Mayer, DSc.**  
V. P. Astafev Krasnoyarsk State Pedagogical University  
89, Ada Lebedeva St.  
660049 Krasnoyarsk, Russia  
E-mail: mavr49@mail.ru

 **Dr. Gennady Klekovkin, Assoc. Prof.**  
Moscow State Pedagogical University – Samara Branch  
76, Stara Zagora St.  
443081 Samara, Russia  
E-mail: klekovkin\_ga@mail.ru

 **Dr. Raisa Ovchinnikova, Assoc. Prof.**  
M. V. Lomonosov Northern (Arctic) Federal University  
17, Severnaya Dvina Emb.  
163002 Arkhangelsk, Russia  
E-mail: r.ovchinnikova@narfu.ru

 **Prof. Maria Shabanova, DSc.**  
Moscow Center for Human Resource Development  
6, Aviationsionnyi Per.  
125167 Moscow, Russia  
E-mail: shabanovamv@mioo.ru

 **Prof. Alexander Yastrebov, DSc.**  
K. D. Ushinski Yaroslavl State Pedagogical University  
108/1, Respublikanskaya St.  
150000 Yaroslavl, Russia  
E-mail: alexander.yastrebov47@gmail.com