

ЕЛЕМЕНТАРНИ ТОЧКОВИ КОНФИГУРАЦИИ. ДИАГОНАЛЕН ПРИНЦИП. ИНВАРИАНТИ

Здравко Лалчев, Ирина Вутова

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Понятията лице на триъгълник и обем на тетраедър са интерпретирани като инварианти на елементарни точкови конфигурации в двумерно и тримерно пространство и е намерен техен аналог в четиримерно пространство. Идеята за инвариант на елементарна точкова конфигурация е продължена и в n -мерно пространство, като е формулиран общ принцип за нейното развитие. Използвани са методи на аналитичната геометрия (векторно-алгебрично моделиране, афинна координатна система, координати на точка, координати на вектор) и средства на линейната алгебра (детерминанти).

Keywords: triangle; area; tetrahedron; volume; invariant; vector-algebraic modeling; affine co-ordinates; diagonal principle

1. Предварителни бележки

Дори малките ученици знаят, че при намиране лицето на триъгълник е без значение коя от трите страни е избрана за основа, т.е. лицето на триъгълника не зависи от реда на точките, които са негови върхове. Добре е известно, че произволна точка във вътрешността, свързана праволинейно с върховете, разделя триъгълника на три триъгълника, сборът от лицата на които е равен на лицето на основния триъгълник. Също така е известно, че съществуват различни формули, т.е. различни алгебрични изрази, които представят величината лице (на триъгълник). Много от свойствата на лицето на триъгълник могат да бъдат „пренесени“ и в пространствената геометрия. За целта е достатъчно триъгълникът да се замени с тетраедър, а лицето – с обем. Например при задачи, свързани с обем на тетраедър, често пъти решението се „получава“, като се смени основата. Последният подход има не само евристична, но и доказателствена стойност. (Обемът на тетраедъра не зависи от това коя от четирите стени е основа.) Както при триъгълника, така и при тетраедъра, произволна точка във вътрешността, свързана праволинейно с върховете, разделя тетраедъра на четири тетраедъра, сборът от обемите на които е равен на обема на основния тетраедър.

В този ред на мисли, изниква въпросът дали „важните“ понятия лице на триъгълник и обем на тетраедър са „привилегия“ само на двумерното и три-

мерното пространство и дали в пространства с размерност, по-висока от 3, могат да се намерят техни аналози.

Оказва се, че идеята за търсене на аналози на лицето и обема в пространства с по-висока размерност може да бъде разширена и развита, но за тази цел е необходимо да се излезе от ограниченията на инструментариума на елементарната геометрия. В тази връзка е целесъобразно (според нас) проблемната ситуация да се моделира векторно-алгебрично, задачата да се пренесе в „полето“ на аналитичната геометрия и (за целите на изследването) да се приложат средства на линейната алгебра (Vutova, 2014). Един вариант в тази посока е предложен в следващите точки на разработката.

2. Двумерно пространство

2.1. Уводни бележки. Лема.

Нека в равнината (2-мерно пространство) е дадена афинна координатна система.

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots$ са вектори с координати, съответно:

$$\mathbf{a}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12})$$

$$\mathbf{a}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22})$$

$$\mathbf{a}_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32})$$

.....

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} \text{ и т.н.};$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \end{vmatrix} \text{ и т.н.};$$

Като вземем предвид, че

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix},$$

достигаем до следната:

Лема. За детерминантите $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}.$$

Коментар. Равенството в лемата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагонален“ принцип. Лявата страна се получава, като „колонката“ $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$ се

запише три пъти последователно на един ред, т.е. $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$, след което буквите $(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1)$ по второстепенния „диагонал“ на получената „матрица“ се зачертават. Така се получават детерминантите $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$. Знаците пред тях (+ и –) се сменят алтернативно, като се започва със знака „+“. (Дясната страна е $\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}$.)

2.2. Елементарна точкова конфигурация в двумерно пространство

Нека A_1, A_2, A_3 са три точки в равнината. Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите две, получаваме три отсечки – A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 . Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в двумерното пространство. Точките A_1, A_2, A_3 ще наричаме **върхове**, а отсечките A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

2.2.1. Детерминанта на наредена тройка точки

Нека са дадени точките A_1, A_2, A_3 с координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}).$$

Детерминантата $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{vmatrix}$ ще наричаме **детерминанта** на наредената

тройка точки (A_1, A_2, A_3) . Съгласно въведените по-горе означения можем да

запишем: $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}.$

Тъй като три обекта могат да бъдат наредени по $3!$ начина, то с тройката точки A_1, A_2, A_3 можем да свържем $3.2.1 = 6$ детерминанти от трети ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \end{vmatrix}.$$

Въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове. Това означава, че техните абсолютни стойности са равни.

Известно е, че ако базата на координатната система определя триъгълник с лице 1, то детерминантата на тройката точки A_1, A_2, A_3 е равна на ориентираното лице на триъгълника с върхове A_1, A_2, A_3 (Gjonov & Stoev, 1994).

2.1.2. Теорема. Правило на диагонала. Инварианта на елементарна точкова конфигурация

Теорема. Нека точките A_1, A_2, A_3 в равнината образуват наредена тройка (в този ред) и X е произволна точка от равнината. Нека точките имат координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}), X(x_1, x_2).$$

Тогава за детерминантите $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}.$$

Доказателство:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ x \\ a_3 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Коментари и изводи

1) Равенството в теоремата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагонал“ принцип. Лявата страна се получава, като „колонката“ $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}$ се за-

пише три пъти последователно на един ред, т.е. $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_2 \\ A_3 & A_3 & A_3 \end{vmatrix}$, след което

буквите (A_3, A_2, A_1) по „второстепенния диагонал“ на получената „матрица“

се заменят с буквата X . Така се получават детерминантите $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & X \\ A_2 & X & A_2 \\ X & A_3 & A_3 \end{vmatrix}$,

които се свързват със знаци „+“. (Дясната страна е $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}$.)

2) Съгласно лемата сборът $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$ (на детерминантите, разпо-

ложени по „главния диагонал“) е равен на $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}$. Останалите събираеми (де-

терминанти) могат да бъдат групирани по двойки така, че във всяка двойка компонентите да са противоположни числа. Събираемите с противоположни стойности са разположени симетрично на главния диагонал. Това означава, че сборът на детерминантите „извън“ главния диагонал е равен на нула. Действително,

$$- \begin{vmatrix} a_1 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_2 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3) Теоремата показва, че точка X , „разположена по второстепенния диагонал“ на лявата страна, не участва в дясната страна на равенството. Ето защо тази теорема може да бъде наречена „правило за изключване на точка“ или „**правило на диагонала**“ в двумерно пространство.

4) Теоремата има следния геометричен смисъл.

Ако A_1, A_2, A_3 са три точки в равнината и X е произволна точка от тази равнина, то алгебричният сбор на ориентираните лица на триъгълниците $A_1A_2X, A_1XA_2, XA_2A_3$ не зависи от точката X и е равен на ориентираното лице на триъгълник $A_1A_2A_3$.

5) Горните разсъждения ни дават основание да въведем понятието инвариант на елементарна точкова конфигурация в двумерно пространство. И така: нека е дадена елементарна конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3 (в двумерно пространство). Тогава абсолютната стойност на детерминантата на която и да е от наредените тройки, получени от точките A_1, A_2, A_3 , ще наричаме **инвариант на елементарната точкова конфигурация** A_1, A_2, A_3 .

3. Тримерно пространство

3.1. Уводни бележки. Лема

Нека в пространството (3-мерно пространство) е дадена афинна координатна система.

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \dots$ са вектори с координати съответно:

$$\mathbf{a}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}),$$

$$\mathbf{a}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}),$$

$$\mathbf{a}_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}),$$

$$\mathbf{a}_4 = (\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}),$$

.....

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \dots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \text{ и т.н.};$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_4 \end{vmatrix}, \dots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{vmatrix}$$

и т.н.

Като вземем предвид, че

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{vmatrix},$$

достигаем до следната:

Лема. За детерминантите $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{vmatrix}$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{vmatrix}.$$

Коментар. Равенството в лемата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагонален“ принцип. Лявата страна на равенството се получава, като

„колонката“ $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}$ се запише четири пъти последователно на един ред, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix},$$

след което буквите (a_4, a_3, a_2, a_1) по „второстепенния диагонал“ на получената „матрица“ се зачертаят. Така се получават детерминантите

$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_3 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_4 & a_4 \end{vmatrix}$. Знаците пред тях („+“ и „-“ се сменят алтерна-

тивно, като се започва със знака „+“. (Дясната страна е $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$.)

3.2. Елементарна точкова конфигурация в тримерно пространство

Нека A_1, A_2, A_3, A_4 са четири точки в пространството (3-мерно). Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите три, получаваме шест отсечки – $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4$. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в тримерното пространство. Точките A_1, A_2, A_3, A_4 ще наричаме **върхове**, а отсечките $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4$ ще наричаме **ръбове** на конфигурацията,

3.2.1. Детерминанта на наредена четворка точки

Нека са дадени точките A_1, A_2, A_3, A_4 с координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}), A_4(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}).$$

Детерминантата $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix}$ ще наричаме **детерминанта на наредената четворка точки** (A_1, A_2, A_3, A_4).

Съгласно въведените по-горе означения можем да запишем:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}.$$

Тъй като четири обекта могат да бъдат наредени по 4! начина, то с четворката точки A_1, A_2, A_3, A_4 можем да свържем $4.3.2.1 = 24$ детерминанти от четвърти ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_2 \\ A_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_2 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} A_4 \\ A_3 \\ A_1 \\ A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_4 \\ A_2 \\ A_1 \\ A_3 \end{vmatrix}.$$

Въпросните детерминанти се получават една от друга чрез размятане на редове. Това означава, че техните абсолютни стойности са равни.

Известно е, че ако базата на координатната система определя тетраедър с лице 1, то детерминантата на четворката точки A_1, A_2, A_3, A_4 е равна на ориентирания обем на тетраедъра с върхове A_1, A_2, A_3, A_4 (Gjonov & Stoev, 1994).

3.1.2. Теорема. Правило на диагонала. Инвариант на елементарна точкова конфигурация

Теорема. Нека точките A_1, A_2, A_3, A_4 образуват наредена четворка (в този ред) и X е произволна точка в пространството. Нека точките имат координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}), A_4(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}) \\ X(x_1, x_2, x_3).$$

Тогава за детерминантите $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$$

Доказателство:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Коментари и изводи

1) Равенството в теоремата се „конструира“ лесно, като се приложи „диа-

гонален“ принцип. Лявата страна се получава, като „колонката“ $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$ се запи-

ше четири пъти последователно, т.е. $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_2 & A_2 \\ A_3 & A_3 & A_3 & A_3 \\ A_4 & A_4 & A_4 & A_4 \end{vmatrix}$, след което буквите

(A_4, A_3, A_2, A_1) по „второстепенния диагонал“ на получената „матрица“ се за-

менят са буквата X. Така се получават детерминантите $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & X \\ A_2 & A_2 & X & A_2 \\ A_3 & X & A_3 & A_3 \\ X & A_4 & A_4 & A_4 \end{vmatrix}$,

които се свързват със знаци „+“. (Дясната страна е $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$.)

2) Съгласно лемата сборът $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}$ (на детерминантите, разположени по „главния диагонал“) е равен на $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix}$. Останалите събираеми

(детерминанти) могат да бъдат групирани по двойки така, че във всяка двойка събираемите да са противоположни числа. Детерминантите с противоположни стойности са разположени симетрично на главния диагонал. Това означава, че сборът на детерминантите „извън“ главния диагонал е равен на нула.

Действително,

$$-\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \end{vmatrix} = 0, -\begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} = 0, -\begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \end{vmatrix} = 0, -\begin{vmatrix} a_2 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Теоремата показва, че точка X , „разположена по второстепенния диагонал“ на лявата страна, не участва в дясната страна на равенството. Ето защо тази теорема може да бъде наречена „правило за изключване на точка“ или „**правило на диагонала**“ в тримерно пространство.

3) Теоремата има следния геометричен смисъл.

Ако A_1, A_2, A_3, A_4 са четири точки в пространството и X е произволна точка, то алгебричният сбор от ориентираните обеми на тетраедрите $A_1A_2A_3X, A_1A_2XA_4, A_1XA_3A_4, XA_2A_3A_4$ не зависи от точката X и е равен на ориентирания обем на тетраедъра $A_1A_2A_3A_4$.

4) Горните разсъждения ни дават основание да въведем понятието инвариант на елементарна точкова конфигурация в тримерно пространство. И така: нека е дадена елементарна конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3, A_4 (в тримерно пространство). Тогава абсолютната стойност на детерминантата на която и да е от наредените четворки, получени от точките A_1, A_2, A_3, A_4 , ще наричаме **инвариант на елементарната точкова конфигурация** A_1, A_2, A_3, A_4 .

4. Четиримерно пространство

4.1. Уводни бележки. Лема

Нека в 4-мерното пространство е дадена афинна координатна система.

Нека $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots$ са вектори с координати съответно:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}), \\ \mathbf{a}_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}) \\ \mathbf{a}_3 &= (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}) \\ \mathbf{a}_4 &= (\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}) \\ \mathbf{a}_5 &= (\alpha_{51}, \alpha_{52}, \alpha_{53}, \alpha_{54}) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_5 \end{vmatrix}$$

и т.н.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_5 \end{vmatrix}, \dots\dots\dots, \begin{vmatrix} \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_5 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_1 \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

Като вземем предвид, че

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{5+5} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{4+5} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} + (-1)^{3+5} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} + \\ &\quad + (-1)^{2+5} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} + (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

достигаем до следната:

Лема. За детерминантите $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}$ е в сила ра-

венството:

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}.$$

Коментар. Равенството в лемата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагонален“ принцип. Лявата страна на равенството се получа-

ва, като „колонката“ $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}$ се запише пет пъти последователно на един ред,

т.е. $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}$, след което буквите по „второстепенния диаго-

нал“ $(a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$ на получената „матрица“ се зачертаят. Така се по-

лучават детерминантите $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_3 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_4 & a_4 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_5 & a_5 & a_5 \end{vmatrix}$. Знаците пред тях („+“ и

„-“) се сменят алтернативно, като се започва със знака „+“. (Дясната страна

е $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}$.)

4.2. Елементарна точкова конфигурация в четиримерно пространство

Нека A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 са пет точки в четиримерно пространство. Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите четири, получаваме 10 отсечки – $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5$. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в четиримерното пространство. Точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ще наричаме **върхове**, а отсечките $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5$ ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

4.2.1. Детерминанта на наредена петорка точки

Нека са дадени точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 с координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}), \\ A_4(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}), A_5(\alpha_{51}, \alpha_{52}, \alpha_{53}, \alpha_{54}).$$

$$\text{Детерминантата } \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \end{vmatrix} \text{ ще наричаме детерминанта на наредената петорка точки } (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5).$$

Съгласно въведените по-горе означения можем да запишем:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}.$$

Тъй като пет обекта можем да наредим по $5!$ начина, то с петте точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 можем да свържем $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ детерминанти от пети ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_3 \\ A_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_5 \\ A_4 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} A_5 \\ A_4 \\ A_3 \\ A_1 \\ A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_5 \\ A_4 \\ A_2 \\ A_1 \\ A_3 \end{vmatrix}.$$

Въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове. Това означава, че техните абсолютни стойности са равни.

$$\begin{aligned}
 & + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \\
 & + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \\
 & + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Коментари и изводи

1) Равенството в теоремата се „конструира“ лесно, като се приложи „ди-

агонален“ принцип. Лявата страна се получава, като „колонката“ $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}$ се за-

пише четири пъти последователно, т.е. $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_2 & A_2 & A_2 \\ A_3 & A_3 & A_3 & A_3 & A_3 \\ A_4 & A_4 & A_4 & A_4 & A_4 \\ A_5 & A_5 & A_5 & A_5 & A_5 \end{vmatrix}$, след което

буквите (A_5, A_4, A_3, A_2, A_1) по второстепенния диагонал на получената „мат-

рица“ се заменят с буквата X. Така се получават детерминантите $\begin{vmatrix} A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 \\ A_3 & A_3 \\ A_4 & X \\ X & A_5 \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & X \\ A_2 & X & A_2 \\ X & A_3 & A_3 \\ A_4 & A_4 & A_4 \\ A_5 & A_5 & A_5 \end{vmatrix} \text{ които се свързват със знаци „+“. (Дясната страна е } \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix})$$

2) Съгласно лемата сборът $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix}$ (на детерми-

нантите, разположени по „главния диагонал“) е равен на $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{vmatrix}$. Останалите

(детерминанти) могат да бъдат групирани по двойки така, че във всяка двойка събираемите да са противоположни числа. Детерминантите с противоположни стойности са разположени симетрично на главния диагонал. Това означава, че сборът на детерминантите „извън“ главния диагонал е равен на нула. Действително,

$$\begin{aligned} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ x \end{vmatrix} &= 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} = 0, \quad - \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} &= 0, \quad - \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ x \\ a_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 \\ x \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

3) Теоремата показва, че точка X , разположена по „второстепенния диагонал“ на лявата страна, не участва в дясната страна на равенството. Ето защо тази теорема може да бъде наречена „правило за изключване на точка“ или „**правило на диагонала**“ в четиримерно пространство.

4) Нека множеството от пет точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и определените от тях 10 отсечки – $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_4A_5$ наречем **симплекс** в четиримерното прос-

Ако A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 са пет точки в 4-мерно пространство и X е произволна точка, то алгебричният сбор от „ориентираните обеми“ на симплексите $A_1A_2A_3A_5X, A_1A_2A_3XA_5, A_1A_2XA_4A_5, A_1XA_3A_4A_5, XA_2A_3A_4A_5$ не зависи от точката X и е равен на „ориентирания обем“ на симплекса $A_1A_2A_3A_4A_5$.

4) Горните разсъждения дават основание да въведем понятието инвариант на елементарна точкова конфигурация в 4-мерно пространство. И така: нека е дадена елементарна конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (в четиримерно пространство). Тогава абсолютната стойност на детерминантата на която и да е от наредените петорки, получени от точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , ще наричаме **инвариант на елементарната точкова конфигурация** A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

5.1. Уводни белешки. Лема

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}$, са вектори с координати съответно:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n-1}, \alpha_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}) \\ \mathbf{a}_3 &= (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{3n-1}, \alpha_{3n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_n &= (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \dots, \alpha_{nn-1}, \alpha_{nn}) \\ \mathbf{a}_{n+1} &= (\alpha_{n+11}, \alpha_{n+12}, \alpha_{n+13}, \dots, \alpha_{n+1n-1}, \alpha_{n+1n}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\dots\alpha_{1n-1}\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\dots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\dots\alpha_{3n-1}\alpha_{3n} \\ \vdots \\ \alpha_{n-11}\alpha_{n-12}\alpha_{n-13}\dots\alpha_{n-1n-1}\alpha_{n-1n} \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\dots\alpha_{nn-1}\alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{vmatrix}, \dots\dots$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1}\alpha_{nn} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1}\alpha_{3n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{n-11}\alpha_{n-12}\alpha_{n-13} \dots \alpha_{n-1n-1}\alpha_{n-1n} \\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1}\alpha_{1n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \dots \\ \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix}, \dots\dots$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1}\alpha_{nn} \\ \alpha_{n-11}\alpha_{n-12}\alpha_{n-13} \dots \alpha_{n-1n-1}\alpha_{n-1n} \\ \alpha_{n-21}\alpha_{n-22}\alpha_{n-23} \dots \alpha_{n-2n-1}\alpha_{n-2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} \\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1}\alpha_{1n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{a}_{n-2} \\ \dots \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

Също така:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1}\alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1}\alpha_{3n} & 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1}\alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11}\alpha_{n+12}\alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1}\alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \dots \\ \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_{n+1} \end{vmatrix}, \dots\dots$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n+11}\alpha_{n+12}\alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1}\alpha_{n+1n} & 1 \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1}\alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n-11}\alpha_{n-12}\alpha_{n-13} \dots \alpha_{n-1n-1}\alpha_{n-1n} & 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1}\alpha_{1n} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{n+1} \\ \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_{n-1} \\ \dots \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

Тъй като

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1}\alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1}\alpha_{3n} & 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1}\alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11}\alpha_{n+12}\alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1}\alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{n+1+n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1} \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1} \alpha_{3n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1} \alpha_{nn} & 1 \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^{n+n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1} \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1} \alpha_{3n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n+11} \alpha_{n+12} \alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1} \alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} + \dots \\
 &\dots + (-1)^{3+n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1} \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1} \alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11} \alpha_{n+12} \alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1} \alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^{2+n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1} \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1} \alpha_{3n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1} \alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11} \alpha_{n+12} \alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1} \alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^{1+n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1} \alpha_{3n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1} \alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11} \alpha_{n+12} \alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1} \alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

то е в сила следната:

Лема. За детерминантите $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_{n-2} \\ a_n \\ a_{n+1} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ \dots \\ a_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \end{vmatrix}$ и

Коментар. Равенството в лемата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагоналният“ принцип.

Нека $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ са $n + 1$ точки в n -мерно пространство. Като

отсечки – $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_n, A_1A_{n+1}, A_2A_3, \dots, A_2A_n, A_2A_{n+1}, \dots, A_nA_{n+1}$. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация**.

5.2.1. Детерминанта на наредена $n+1$ -ка точки

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n-1}, \alpha_{1n}),$$

596

Съгласно въведените означения

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \alpha_{1n-1} \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} & 1 \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \alpha_{3n-1} \alpha_{3n} & 1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots \alpha_{nn-1} \alpha_{nn} & 1 \\ \alpha_{n+11} \alpha_{n+12} \alpha_{n+13} \dots \alpha_{n+1n-1} \alpha_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Тъй като $n + 1$ обекта могат да бъдат наредени по $(n + 1)!$ начина, то с редицата $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ от точки можем да свържем $(n+1).n \dots 2.1$ детерминанти от $n+1$ ред, а именно:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ A_n \\ A_{n+1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} A_{n+1} \\ A_n \\ A_{n-1} \\ \vdots \\ A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$$

5.2.2. Хипотеза. Правило на диагонала. Инварианта на елементарна точкова конфигурация в n -мерно пространство

Хипотеза. Нека точките $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ образуват наредена $n+1$ -ка (в този ред) и X е произволна точка в n -мерно пространство. Нека точките имат координати съответно:

$$\begin{aligned} & A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n-1}, \alpha_{1n}), \\ & A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}), \\ & A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{3n-1}, \alpha_{3n}), \\ & \dots\dots\dots \\ & A_n(\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \dots, \alpha_{nn-1}, \alpha_{nn}), \\ & A_{n+1}(\alpha_{n+11}, \alpha_{n+12}, \alpha_{n+13}, \dots, \alpha_{n+1n-1}, \alpha_{n+1n}). \end{aligned}$$

Тогава за детерминантите:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{n-1} \\ X \\ A_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_{n-2} \\ X \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_4 \\ \dots \\ A_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ \dots \\ A_{n-1} \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}$$

и $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}$ в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{n-1} \\ X \\ A_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_{n-2} \\ X \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ X \\ A_4 \\ \dots \\ A_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ X \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X \\ A_2 \\ \dots \\ A_{n-1} \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Коментар. Равенството в хипотезата се „конструира“ лесно, като се приложи „диагоналният“ принцип.

6. Вместо заключение

1) Нека множеството от $n+1$ точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ и определените от

тях $\frac{(n+1)n}{2}$ отсечки – $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_nA_{n+1}$ наречем **симплекс** в n -мер-

ното пространство, а детерминантата $\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \\ A_{n+1} \end{vmatrix}$ наречем „**ориентиран обем**“ на

симплекса $A_1A_2A_3\dots A_nA_{n+1}$.

Тогава формулираната хипотеза има следния геометричен смисъл:

Ако $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ са $n+1$ точки в n -мерното пространство и X е произволна точка, то алгебричният сбор от „ориентираните обеми“ на симплексите $A_1 A_2 A_3 \dots A_n X, A_1 A_2 \dots A_{n-1} X A_{n+1}, A_1 \dots A_{n-2} X A_n A_{n+1}, \dots, A_1 X A_3 \dots A_n A_{n+1}, X A_2 \dots A_{n-1} A_n A_{n+1}$ не зависи от точката X и е равен на „ориентирания обем“ на симплекса $A_1 A_2 A_3 \dots A_n A_{n+1}$.

2) Хипотезата показва, че точка X , разположена по „второстепенния диагонал“ на лявата страна, не участва в дясната страна на равенството. Ето защо тази теорема може да бъде наречена „правило за изключване на точка“ или „правило на диагонала“ в n -мерно пространство.

3) Горните разсъждения дават основание да въведем понятието инвариант на елементарна точкова конфигурация в n -мерно пространство. И така: нека е дадена елементарна конфигурация с върхове $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ (в n -мерно пространство). Тогава абсолютната стойност на детерминантата на която и да е от наредените $n+1$ -ки, получени от точките $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$, ще наричаме **инварианта на елементарната точкова конфигурация** $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$.

REFERENCES/LITERATURA

- Vutova, I. (2014). *Heuristic and prognostic role of the theorems in the school curriculum of Mathematics. Author-report of PhD Dissertation*. Sofia. [Вутова, И. (2014). *Евристична и прогностична роля на теоремите в училищния курс по математика. Автореферат на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен доктор*. София].
- Gavrilov, M. & I. Dimovski (1973). *Introduction to Elementary algebra* (in Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Гаврилов, М. & И. Димовски (1973). *Въведение в елементарната алгебра*. София: Народна просвета].
- Gjonov, A. & N. Stoev (1994). *Collection of problems on Analytical Geometry* (in Bulgarian). Sofia & SOFTEH. [Гъонов, А. & Н. Стоев (1994). *Сборник от задачи по аналитична геометрия*. София: СОФТЕХ].
- Dochev, K. & D. Dimitrov (1973). *Linear algebra* (in Bulgarian). Sofia: Nauka I izkustvo. [Дочев, К. & Д. Димитров (1973). *Линейна алгебра*. София: Наука и изкуство].
- Lalchev, Z., I. Vutova & M. Varbanova (2005). *Vector-analytical method in solving geometric problems on areas and volumes* (in Bulgarian). Sofia:

- Veda Slovena-JT. [Лалчев, З., И. Вутова & М. Върбанова (2005). *Векторно-алгебричен метод за решаване на геометрични задачи от лица и обеми*. София: Веда Словена-ЖГ].
- Tonov, I. (1980). *Matrices and determinants* (in Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Тонов, И. (1980). *Матрици и детерминанти*. София: Народна просвета].
- Yaglom, I. & V. Ashkinuze (1962). *Ideas and methods of Affine and Projective geometries, Part I* (in Russian). Moscow: State scholarpedagogical publishing house of the Russian Ministry of Education. [Яглом, И. & В. Ашкинузе (1962). *Идеи и методы аффинной и проективной геометрии I часть*. Москва: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР].

BASIC CONFIGURATIONS OF POINTS. DIAGONAL PRINCIPLE. INVARIANTS

Abstract. The concepts of area of a triangle and volume of a tetrahedron are interpreted as invariants of basic configurations of points in two and three-dimensional spaces and their analogues are found in four-dimensional space. The idea of the invariant of a basic configuration of points is continued for n -dimensional space and a general principle for its development is formulated. Methods of analytical geometry (vector-algebraic modeling, affine co-ordinates, point co-ordinates, vector co-ordinates) and instruments of linear algebra (determinants) are used.

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**
Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1574 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Dr. Irina Voutova, Assist. Prof.**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Sofia
5, James Boucher Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: irinazv@abv.bg