Educational Matters /
Въпроси на преподаването

ЕЛЕМЕНТАРНИ АРИТМЕТИЧНИ ЗАДАЧИ. СТРУКТУРА И МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ. КЛАСИФИКАЦИЯ. ТЕКСТОВИ ЗАДАЧИ

[1]Маргарита Върбанова, [2]Здравко Лалчев, [2]Ирина Вутова
[1]*Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“*
[2]*Софийски университет „Св. Климент Охридски“*

Резюме. Разработката е съсредоточена върху елементарните аритметични задачи в началната училищна математика. За теоретични и практически цели е предложена „дефиниция“ на понятието елементарна аритметична задача и е въведена категорията структура на задачата. На основата на „списък“ от 12 вида задачи е направена логико-математическа класификация на елементарни аритметични задачи, в която са обхванати 24 класа. Всеки клас е представен чрез конкретен пример, в който са показани структурните и математическите модели на задачата. Математическите и практическите задачи са разгледани в единство. Разработката е отражение на конструктивистки подход в обучението по математика и представлява първи етап от изследване по темата „Аритметичните задачи в началната училищна математика“.

Keywords: primary school mathematics, elementary arithmetic problem, structural model, mathematical model, arithmetical equation, arithmetical transformation

1. Вместо въведение. Настоящето изследване е вдъхновено от книгата „За математическите задачи“ (Ганчев, 1976) на видния български учен, математик и педагог, проф. д.п.н. Иван Ганчев (1935 – 2012).

Известно е, че задачите играят две особено важни роли в обучението по математика в началните класове. От една страна, те самите са главна цел на обучението, а от друга страна – задачите са основно средство за усвояване на математическите знания и формиране на математически умения. В тази връзка по-голямата част от съдържанието на училищния курс по математика е построено от задачи.

Обща класификация на задачите е направена в (Grozdev, 2007). Задачите в началната училищна математика могат да бъдат разделени на две големи категории – математически и практически. Последните често са наричани текстови задачи. На това място ще направим една бележка във връзка с термина „текстови задачи“. Терминът се е наложил в училищната практика, но той не представя точно съдържанието на понятието. Във формулировката (постановката) на всяка задача има „текстова“ част и в този смисъл всяка задача е текстова. За да не нарушаваме традицията, ние ще използваме термина „текстова задача“, но с известна уговорка. А именно, че текстовата задача означава практическа задача, т.е. задача, в която е отразена реална или въображаема практическа ситуация и в текста на задачата участват освен математически термини и думи и изрази от разговорния език. Известно е още, че чрез решаването на текстови задачи се цели учениците да се запознаят с практическата приложимост на математиката и да овладеят „изкуството“ математическо моделиране.

2. За главните части на задачата

За по-голяма яснота в по-нататъшното изложение, ще се опитаме накратко да конкретизираме вижданията по отношение използваното нашироко дихотомно разделяне на „главните“ части на задачата. Известно е, че в текста (постановката) на задачата могат да бъдат отделени две „главни“ части. В едни случаи главните части са „условие“ и „заключение“ (логическо деление), в други случаи са „дадено“ и „търсено“ (дидактическо деление), а в трети случаи са „известно“ и „неизвестно“ (психологическо деление). Независимо от това, че в съдържателно отношение между трите класификации има известно „припокриване“, те не са напълно тъждествени. Във всяка от тях има определен акцент. Според нас първата класификация (условие, заключение) означава, че задачата е предмет на информация – например преподавателят съобщава задачата по време на лекция или урок. Втората класификация (дадено, търсено) означава, че задачата е цел на обучение – например обучителят представя задачата пред обучаемите по време на урок (или лекция) и провежда анализ с цел търсене на решение на задачата. Третата класификация (известно, неизвестно) означава, че задачата е предмет на изучаване – например обучаемият решава задачата самостоятелно (или с помощ) и за целта конструира математически модел на задачата. Предложените класификации на текста на задачата са твърде общи, отразяват по-скоро психолого-педагогически параметри и същите не представят достатъчно ясно математическата същност на задачата. По тази причина ние използваме посочената терминология в метаматематически план.

3. Елементарна аритметична задача. Математически модел

Ще отбележим, че в по-голямата си част задачите в началната училищна математика са задачи, в чиято постановка и решение се използва **аритметичен понятиен апарат**. Тези задачи ще наричаме **аритметични** и същите ще бъдат предмет на следващото изложение.

Обикновено в традиционната методика на обучението по математика в началните класове под „елементарна (проста) задача“ се разбира „задача, която се решава с едно пресмятане (аритметично действие)“. За нашите цели тази „дефиниция“ е твърде обща и в този смисъл понятието „елементарна аритметична задача“ се нуждае от уточняване.

В общ план, в текста (постановката) на елементарната аритметична задача има информация за **числови данни** и за **аритметични действия**. Обектите са представени чрез числовите данни, а връзките между тях са изразени чрез аритметичните действия. В началната училищна математика се изучават **естествените числа** и четирите действия –**аритметичните операции** събиране, изваждане, умножение, деление.

И по-конкретно, в една елементарна аритметична задача от началната училищна математика обикновено става дума за **три естествени числа** (две известни и едно неизвестно) и **едно аритметично действие**, чрез което числата са свързани в **равенство**. Тогава може да се каже, че елементарните аритметични уравнения всъщност са математически модели на елементарните аритметични задачи в началната училищна математика. Този извод ни дава основание да приемем следната работна **„дефиниция“ на елементарна задача**:

Нека a, b и x са три **естествени числа**, които са свързани в **равенство** посредством **една** от четирите **аритметични операции –** събиране, изваждане, умножение, деление. Задачата, при която две от числата (a и b) са известни и едно от тях (x) е неизвестно и е поставено изискване неизвестното число да бъде намерено, ще наричаме **елементарна задача** в началната училищна математика (или **елементарна аритметична задача)**.

4. Списък на видовете елементарни аритметични задачи

Ще конкретизираме „дефиницията“, като зададем множеството на елементарните аритметични задачи конструктивно, т.е направим „списък“ на отделните видове елементарни аритметични задачи в началната училищна математика в зависимост от техните математически модели.

По традиция изучаването на задачите в курса по математика започва с изучаването на адитивните операции (събиране и изваждане) и продължава с мултипликативните операции (умножение и деление). В тази връзка списъкът от елементарни аритметични задачи е в същия ред.

АДИТИВНИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ЗАДАЧИ

1) Събиране – права задача (намиране сбор на две числа)

Задача. Дадени са събираемите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Да се намери сборът $\boldsymbol{x}$.

Математически модел. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{x} = ?$

Решение. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

2) Събиране – първа обратна задача (намиране на първо събираемо)

Задача.Дадени са второто събираемо $\boldsymbol{a}$ и сборът $\boldsymbol{b}$. Да се намери първото събираемо $\boldsymbol{x}$.

Математически модел: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{x} = ?$

Решение: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$

3) Събиране – втора обратна задача (намиране на второ събираемо)

Задача. Дадени са първото събираемо $\boldsymbol{a}$ и сборът $\boldsymbol{b}$. Да се намери второто събираемо $\boldsymbol{x}$.

Математически модел: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = ?$

Решение: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$

4) Изваждане – права задача (намиране на разлика)

Задача. Дадени са умаляемото $\boldsymbol{a}$ и умалителят $\boldsymbol{b}$. Да се намери разликата $\boldsymbol{x}$.

Математически модел: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{x} = ?$

Решение: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

5) Изваждане – първа обратна задача (намиране на умаляемо)

Задача. Дадени са умалителят $\boldsymbol{a}$ и разликата $\boldsymbol{b}$. Да се намери умаляемото $\boldsymbol{x}$.

Математически модел: $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{x} = ?$

Решение: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

6) Изваждане – втора обратна задача (намиране на умалител)

Задача. Дадени са умаляемото $\boldsymbol{a}$ и разликата $\boldsymbol{b}$. Да се намери умалителят $\boldsymbol{x}$.

Математически модел: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = ?$

Решение: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

МУЛТИПЛИКАТИВНИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ЗАДАЧИ

7) Умножение – права задача (намиране на произведение)

Задача. Дадени са множителите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Да се намери произведението $\boldsymbol{x}$.

Математически модел: $\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{x} = ?$

Решение: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b}$

8) Умножение – първа обратна задача (намиране на първи множител)

Задача. Дадени са вторият множител $\boldsymbol{a}$ и произведението $\boldsymbol{b}$. Да се намери първият множител $\boldsymbol{x}$.

Математически модел: $\boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{x} = ?$

Решение: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{a}$

9) Умножение – втора обратна задача (намиране на втори множител)

Задача. Дадени са първият множител $\boldsymbol{a}$ и произведението $\boldsymbol{b}$. Да се намери вторият множител $\boldsymbol{x}$.

Математически модел: $a \,.\, x = b \quad (b = a \,.\, x), \quad x = ?$

Решение: $x = b - a$

10) Деление– права задача (намиране на частно)

Задача. Дадени са делимото a и делителят b. Да се намери частното x.

Математически модел: $a : b = x \quad (x = a : b), \quad x = ?$

Решение: $x = a : b$

11) Деление – първа обратна задача (намиране на делимо)

Задача. Дадени са делителят a и частното b. Да се намери делимото x.

Математически модел: $x : a = b \quad (b = x : a), \quad x = ?$

Решение: $x = b \,.\, a$

12) Деление – втора обратна задача (намиране на делител)

Задача. Дадени са делимото a и частното b. Да се намери делителят x.

Математически модел: $a : x = b \quad (b = a : x), \quad x = ?$

Решение: $x = a : b$.

4. За логическата структура на елементарна аритметична задача

За да изясним понятието логическа структура на елементарна аритметична задача, ще разгледаме две различни текстови задачи от началната училищна математика, които имат един и същ математически модел.

Първа задача. *Колко лева има Иван, ако Иван и Георги имат общо* 13 *лева и Георги има 5 лева*?

Втора задача. *Колко лева има Иван, ако Георги има* 13 *лева и тези пари са с* 5 *лева повече от парите на Иван*?

Уравнението: $x + 5 = 13$, $x = ?$ е математически модел и на двете задачи.

Това означава, че и двете задачи имат една и съща математическа структура. От математическа гледна точка, тези задачи са еквивалентни. Но от психолого-дидактическа гледна точка, задачите не са еквивалентни, тъй като техните логически структури са различни.

В първата задача **равенството** в математическия модел се достига посредством действие (аритметична операция „събиране“), а във втората задача **равенството** в математическия модел се достига посредством сравняване (аритметично преобразуване „събиране на“). Това означава, че когато задачите са математически еквивалентни, математическите модели не отчитат различията (ако има такива) в логическите структури на задачите.

Сега да се върнем към „дефиницията“ на елементарна задача и да се опитаме да обобщим казаното по-горе. В елементарната задача се очертават да вида връзки – **основна** и **допълнителна**. Основната връзка между трите числа във всяка задача е релацията **„равно“**. Докато допълнителните връзки в различните задачи могат да бъдат различни в зависимост от начина, по който се „достига“ до равенството. В едни случаи основната връзка, равенството „е резултат на“ аритметична операция – събиране, изваждане, умножение или деление. В други случаи същата връзка „е резултат на“ аритметично преобразуване (операторна релация) – по-голямо, по-малко, пъти по-голямо или пъти по-малко. Още може да се каже, че в логическата структура на задачата явно е представена **допълнителната** връзка (операцията или операторната релация – преобразуванието), докато **основната** връзка (релацията равенство) е представена неявно и тя „се подразбира“.

От дидактиката е известно, че спазването на принципа за нагледност в обучението допринася особено много за разбирането на новото знание, в това число и на задачата. Разбирането в началния етап на обучение се осигурява не толкова от вербалното, колкото от „визуалното“ обяснение. Като се позоваваме на многогодишния преподавателски опит, считаме, че логическата структура на задачата може да бъде представена най-ясно и точно чрез диаграма от клетки (квадратни или правоъгълни „блокчета“), двойка свързващи насочени линии и „числова“ стрелка. В клетките се нанасят числовите данни (числата), двойката насочени линии представя операцията, а „числовата“ стрелка представя релацията (преобразуванието).

По-конкретно, задачите, в които допълнителната връзка е от тип *операция,* представяме чрез М-диаграма. М-диаграмата е съставена от три квадратчета, две от които са на един ред (колонка), а третото е на друг ред (колонка). От двете квадратчета излиза по една насочена линия, всяка от които влиза в третото квадратче, а в празното място между насочените линии се поставя знакът за операцията (сх. 1).

Задачите, в които допълнителната връзка е от тип *преобразуване* (релация от операторен тип, или накратко само *релация*), представяме чрез Z-диаграма. Z-диаграмата е съставена от две квадратчета и една стрелка. Квадратчетата са на един ред (колонка) и са свързани с „числова“ стрелка, която „носи оператора“ („числената стойност“ на релацията). За по-голяма яснота операторът може да бъде поставен в кръгче (овал) (сх. 2).

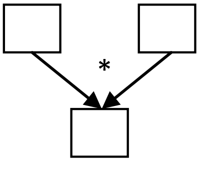


Схема 1

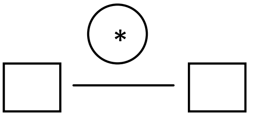
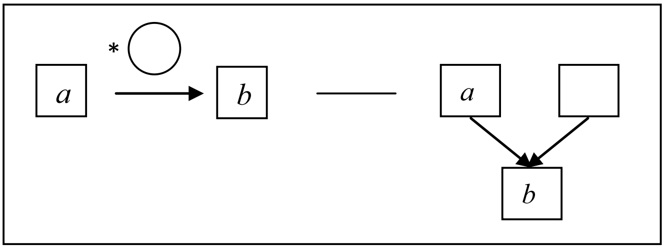
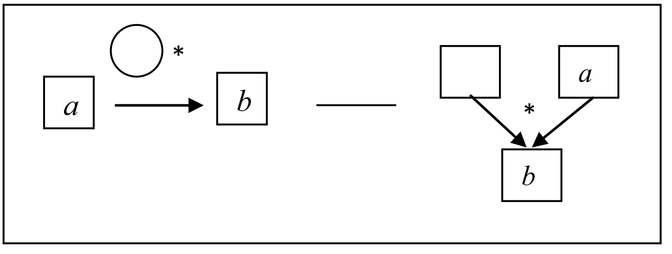


Схема 2

Ще отбележим, че двете диаграми са взаимно заменяеми. Това свойство на диаграмите може да бъде използвано например в случаите, когато неизвестното е в релацията на Z-диаграмата. Действително, например Z-диаграмите на задачите с неизвестно в релацията се преобразуват в M-диаграми по следния начин:





(**Бележка**. Както е известно, елементарните текстови задачи в началната училищна математика могат да бъдат разделени на три категории: „Множество-множество-множество (М-М-М)“, „Множество-релация-множество (М-Р-М)“ и „Релация-релация-релация (Р-Р-Р)“ (Лалчев, 2003, Върбанова, 2013: 126). В настоящата разработка включваме елементарните задачи от първите две категории (М-М-М и М-Р-М), тъй като техните математически модели винаги са аритметични. Математическите модели на задачите от третия тип (Р-Р-Р) в много от случаите имат алгебричен характер, тъй като композицията на две аритметични преобразувания невинаги е елементарно аритметично преобразувание.)

3. Логико-математическа класификация на елементарните аритметични задачи

Предложеният конструктивен подход позволява да се направи класификация, която отчита както математическата, така и логическата структура на елементарните аритметични задачи в началната училищна математика. Тази класификация ще наречем логико-математическа.

Вече стана ясно, че в зависимост от вида на допълнителната връзка, т.е от връзката, чрез която се достига до равенството в задачата („операция“ или „релация“), задачите могат да се разделят на два типа. Условно ще ги наречем задачи от тип *операция* и задачи от тип *релация*.

3.1. Класификация на аритметичните задачи от тип *операция*

В зависимост от вида на операцията елементарните аритметични задачи се разделят (класифицират) на две групи – *адитивни* задачи и *мултипликативни* задачи. От своя страна, адитивните задачи могат да се класифицират на задачи от *събиране* и задачи от *изваждане*, а мултипликативните – на задачи от *умножение* и задачи от *деление*. Също така, задачите от всяка от четирите операции могат да се разделят на *права задача*, *първа обратна задача* и *втора обратна задача*.

Класификацията на задачите от тип *операция* е представена на „дървото“ на сх. 3. (Елементарните видове задачи са 12 и са означени с 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12.)

КЛАСИФИКАЦИЯ

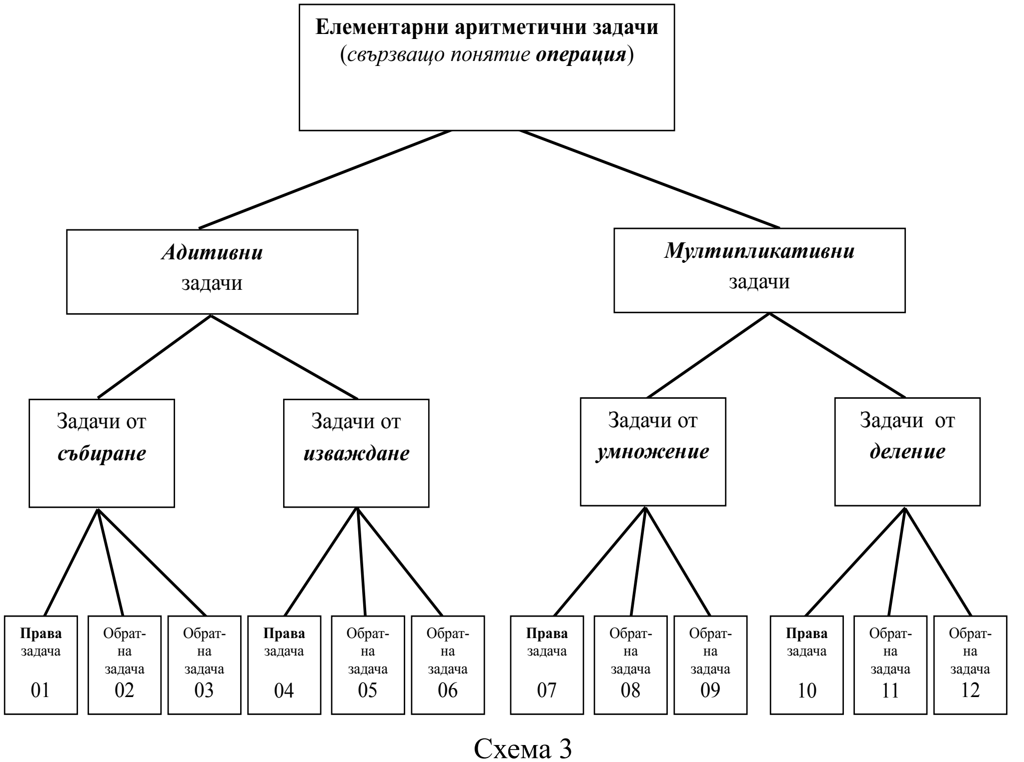
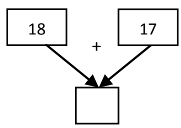


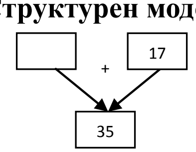
Схема 3

ПРИМЕРИ

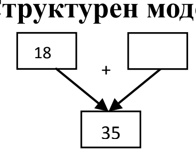
01. ***Събиране*** **– права задача**

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са числата 18 и 17. Намерете техния сбор.
Практическа задача. Иван има 18 лева, Георги има 17 лева. Колко лева общо имат двамата?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\mathbf{18 + 17 = \boldsymbol{x}}$ $\boldsymbol{x} = ?$
Решение
$\boldsymbol{x}\mathbf{ = 18 + 17}$
$\boldsymbol{x}\mathbf{ = 35}$</td></tr>
</table>

02. ***Събиране*** **– първа обратна задача**

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Сборът на две числа е 35. Второто число е 17. Кое е първото число?
Практическа задача. Иван и Георги имат общо 35 лева. Георги има 17 лева. Колко лева има Иван?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\boldsymbol{x}\mathbf{ + 17 = 35}$ $\boldsymbol{x} = ?$
Решение
$\boldsymbol{x}\mathbf{ = 35 - 17}$
$\boldsymbol{x}\mathbf{ = 18}$</td></tr>
</table>

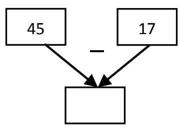
03. ***Събиране*** **– втора обратна задача**

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Сборът на две числа е 35. Първото число е 18. Кое е второто число?
Практическа задача. Иван и Георги имат общо 35 лева. Иван има 18 лева. Колко лева има Георги?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\mathbf{18 + \boldsymbol{x} = 35}$ $\boldsymbol{x} = ?$
Решение
$\boldsymbol{x}\mathbf{ = 35 - 18}$
$\boldsymbol{x}\mathbf{ = 17}$</td></tr>
</table>

04. *Изваждане* – права задача

Текст

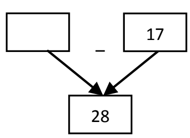
Математическа задача. Дадени са числата 45 и 17. Намерете тяхната разлика.
Практическа задача. Иван имал 45 лева. Дал на Георги 17 лева. Колко лева са му останали?

Структурен модел	Математически модел
 	$45 - 17 = x \quad x = ?$ Решение $x = 45 - 17$ $x = 28$

05. *Изваждане* – първа обратна задача

Текст

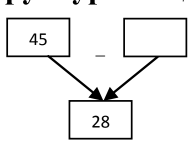
Математическа задача. Разликата на две числа е 28. Умалителят е 17. Кое число е умаляемото?
Практическа задача. Иван дал на Георги 17лева и му останали 28 лева. Колко лева е имал в началото Иван?

Структурен модел	Математически модел
 	$x - 17 = 28 \quad x = ?$ Решение $x = 28 + 17$ $x = 45$

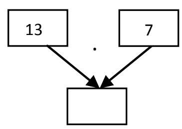
06. *Изваждане* – втора обратна задача

Текст

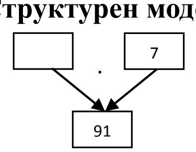
Математическа задача. Разликата на две числа е 28. Умаляемото е 45. Кое число е умалителят?
Практическа задача. Иван имал 45 лева. След като дал на Георги част от парите си, останали му 28 лева. Колко лева е дал на Георги?

Структурен модел	Математически модел
 	$45 - x = 28 \quad x = ?$ Решение $x = 45 - 28$ $x = 17$

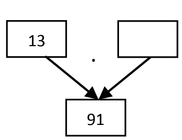
07. ***Умножение*** **– права задача**

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Текст
Математическа задача. Дадени са числата 13 и 7. Намерете тяхното произведение.
Практическа задача. Иван спестявал пари в продължение на 13 дни, като всеки ден поставял в касичката си по 7 лева. Колко лева е спестил Иван?</td></tr>
<tr><td align="center">Структурен модел

</td><td align="center">Математически модел
$\mathbf{13 \cdot 7 = \mathit{x}}$ x = ?
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 13 \cdot 7}$
$\mathbf{\mathit{x} = 91}$</td></tr>
</table>

08. ***Умножение*** **– първа обратна задача**

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Текст
Математическа задача. Произведението на две числа е 91. Второто число е 7. Кое е първото число?
Практическа задача. Иван спестил 91 лева, като всеки ден поставял в касичката си по 7 лева. В продължение на колко дни Иван е спестил парите си?</td></tr>
<tr><td align="center">Структурен модел

</td><td align="center">Математически модел
$\mathbf{\mathit{x} \cdot 7 = 91}$ x = ?
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 91 : 7}$
$\mathbf{\mathit{x} = 13}$</td></tr>
</table>

09. ***Умножение*** **– втора обратна задача**

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Текст
Математическа задача. Произведението на две числа е 91. Първото число е 13. Кое е второто число?
Практическа задача. Иван спестил 91 лева в продължение на 13 дни, като всеки ден поставял в касичката си една и съща сума пари. По колко лева на ден е спестявал Иван?</td></tr>
<tr><td align="center">Структурен модел

</td><td align="center">Математически модел
$\mathbf{13 \cdot \mathit{x} = 91}$ x = ?
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 91 : 13}$
$\mathbf{\mathit{x} = 7}$</td></tr>
</table>

10. ***Деление*** **– права задача**

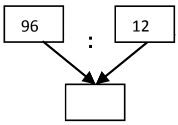
<table>
<tr><td colspan="2">

Текст

Математическа задача. Дадени са числата 96 и 12. Намерете тяхното частно.
Практическа задача. Иван имал 96 лева. С тях купил 12 еднакви подаръци. По колко лева струва всеки подарък?

</td></tr>
<tr><td>

Структурен модел



</td><td>

Математически модел
$\mathbf{96 : 12 = \mathit{x}}$ $x = ?$
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 96 : 12}$
$\mathbf{\mathit{x} = 8}$

</td></tr>
</table>

11. ***Деление*** **– първа обратна задача**

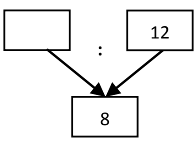
<table>
<tr><td colspan="2">

Текст

Математическа задача. Частното на две числа е 8. Делителят е числото 12. Кое число е делимото?
Практическа задача. На излет ученици от втори клас се разпределили в 12 групи, като във всяка група имало по 8 човека. Колко второкласници са били на излет?

</td></tr>
<tr><td>

Структурен модел



</td><td>

Математически модел
$\mathbf{\mathit{x} : 12 = 8}$ $x = ?$
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 8 . 12}$
$\mathbf{\mathit{x} = 96}$

</td></tr>
</table>

12. ***Деление*** **– втора обратна задача**

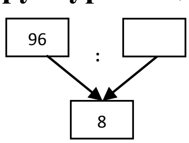
<table>
<tr><td colspan="2">

Текст

Математическа задача. Частното на две числа е 8. Делимото е 96. Кое число е делителят?
Практическа задача. На излет 96 ученици от втори клас се разпределили в групи, като във всяка група имало по 8 човека. В колко групи са се разпределили второкласниците?

</td></tr>
<tr><td>

Структурен модел



</td><td>

Математически модел
$\mathbf{96 : \mathit{x} = 8}$ $x = ?$
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 96 : 8}$
$\mathbf{\mathit{x} = 12}$

</td></tr>
</table>

3.2. Класификация на задачите от тип „*релация*“

Задачите от тип „*релация*“, в зависимост от вида на релацията (адитивни преобразувания или мултипликативни преобразувания), могат да се класифицират на две големи групи – адитивни задачи и мултипликативни задачи. От своя страна, адитивните задачи могат да се класифицират на задачи от „*по-голямо*“ и задачи от „*по-малко*“, а мултипликативните задачи – на задачи от „*пъти по-голям*о“ и „*пъти по-малко*“. Също така, задачите от всяка от четирите релации може да се класифицират на *права задача*, *първа обратна задача*, *втора обратна задача*.

Класификацията на задачите от тип „*релация*“ е представена на „дървото“ на сх. 4.

(Елементарните задачи са 12 и са означени с 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24.)

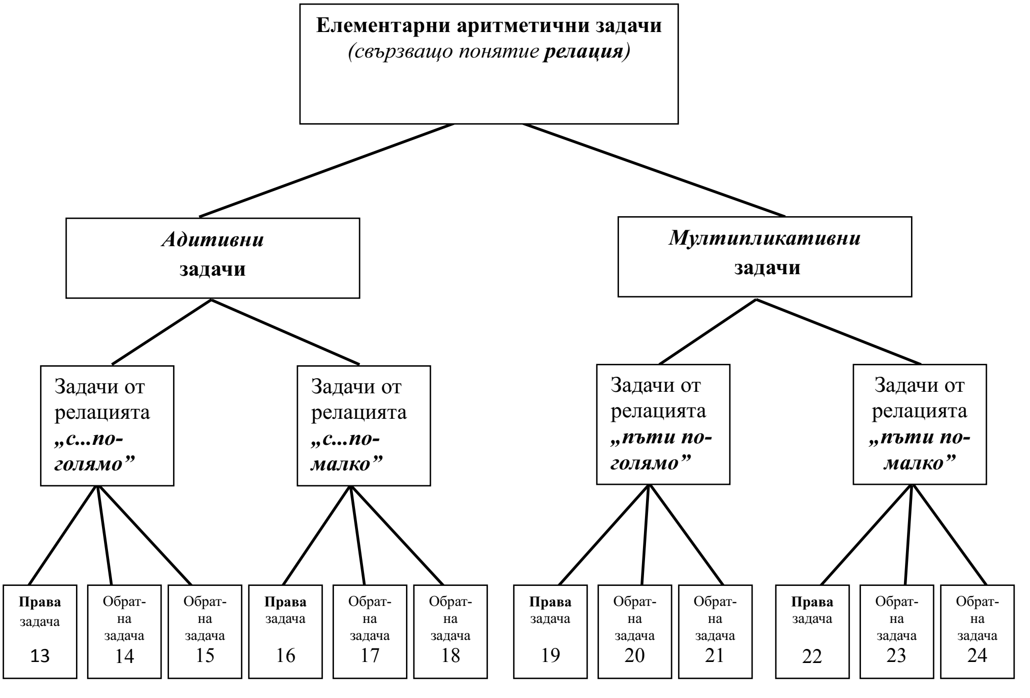
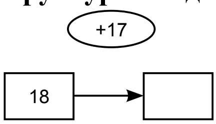


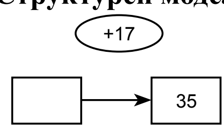
Схема 4

ПРИМЕРИ

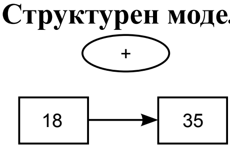
13. *С ... по-голямо* – права задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадено е числото 18. Да се намери числото, което е със 17 по-голямо от него.
Практическа задача. Иван има 18 лева, а Георги има със 17 лева повече. Колко лева има Георги?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\mathbf{18 + 17 = x} \quad \boldsymbol{x} = ?$
Решение
$\mathbf{x = 18 + 17}$
$\mathbf{x = 35}$</td></tr>
</table>

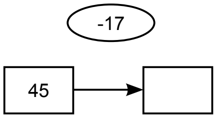
14. *С ... по-голямо* – първа обратна задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са две числа. Известно е, че второто е със 17 по-голямо от първото и че второто число е 35. Кое е първото число?
Практическа задача. Георги има със 17 лева повече от Иван. Парите на Георги са 35 лева. Колко лева има Иван?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\mathbf{x + 17 = 35} \quad \boldsymbol{x} = ?$
Решение
$\mathbf{x = 35 - 17}$
$\mathbf{x = 18}$</td></tr>
</table>

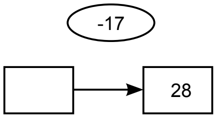
15. *С ... по-голямо* – втора обратна задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Първото число е 18, а второто е 35. С колко второто число е по-голямо от първото?
Практическа задача. Иван има 18 лева, а Георги има 35 лева. С колко лева парите на Георги са повече от парите на Иван?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\mathbf{18 + x = 35}\boldsymbol{x} = ?$
Решение
$\mathbf{x = 35 - 18}$
$\mathbf{x = 17}$</td></tr>
</table>

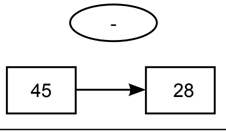
16. *С ... по-малко* – права задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са две числа. Първото е 45, а второто е със 17 по-малко. Кое е второто число?
Практическа задача. Иван има 45 лева, а Георги има със 17 лева по-малко. Колко лева има Георги?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел
</td><td>Математически модел
$\mathbf{45 - 17 = \mathit{x}} \quad \mathbf{\mathit{x}} = ?$
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 45 - 17}$
$\mathbf{\mathit{x} = 28}$</td></tr>
</table>

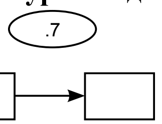
17. *С ... по-малко* – първа обратна задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са две числа. Второто е 28 и е със 17 по-малко от първото. Кое е първото число?
Практическа задача. Георги има 28 лева, които са със 17 лева по-малко от парите на Иван. Колко лева има Иван?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел
</td><td>Математически модел
$\mathbf{\mathit{x} - 17 = 28} \quad \mathbf{\mathit{x}} = ?$
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 28 + 17}$
$\mathbf{\mathit{x} = 45}$</td></tr>
</table>

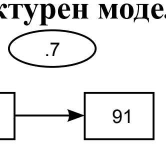
18. *С ... по-малко* – втора обратна задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са числата 45 и 28. С колко второто е по-малко от първото?
Практическа задача. Иван има 45 лева, а Георги има 28 лева. С колко лева парите на Георги са по-малко от парите на Иван?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел
</td><td>Математически модел
$\mathbf{45 - \mathit{x} = 28} \quad \mathbf{\mathit{x}} = ?$
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 45 - 28}$
$\mathbf{\mathit{x} = 17}$</td></tr>
</table>

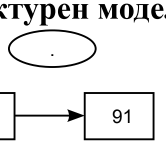
19. ... *пъти по-голямо* – права задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са две числа. Първото е 13, а второто е 7 пъти по-голямо от него. Кое е второто число?
Практическа задача. Иван има 13 лева, а Георги има 7 пъти повече пари. Колко лева има Георги?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\mathbf{13 \cdot 7} = \boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{x} = ?$
Решение
$\boldsymbol{x} = \mathbf{13 \cdot 7}$
$\boldsymbol{x} = \mathbf{91}$</td></tr>
</table>

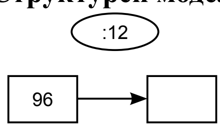
20. ...*пъти по-голямо* – първа обратна задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са две числа. Второто е 91 и е 7 пъти по-голямо от първото. Кое е първото число?
Практическа задача. Иван и Георги си броят парите. Георги има 91 лева, които са 7 пъти повече от парите на Иван. Колко лева има Иван?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{7} = \mathbf{91}$ $\boldsymbol{x} = ?$
Решение
$\boldsymbol{x} = \mathbf{91 : 7}$
$\boldsymbol{x} = \mathbf{13}$</td></tr>
</table>

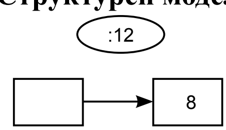
21. ... *пъти по-голямо* – втора обратна задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са две числа. Първото е 13, а второто е 91. Колко пъти второто число е по-голямо от първото?
Практическа задача. Иван има 13 лева, а Георги има 91 лева. Колко пъти парите на Георги са повече от парите на Иван?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\mathbf{13} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{91}$ $\boldsymbol{x} = ?$
Решение
$\boldsymbol{x} = \mathbf{91 : 13}$
$\boldsymbol{x} = \mathbf{7}$</td></tr>
</table>

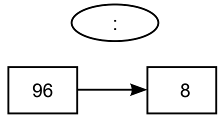
22. ... *пъти по-малко* – права задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са две числа. Първото е 96, а второто е 12 пъти по-малко. Кое е второто число?
Практическа задача. Иван има 96 лева, а Георги има 12 пъти по-малко пари. Колко лева има Георги?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\mathbf{96 : 12 = \mathit{x}}$ $\quad \mathbf{\mathit{x}} = ?$
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 96 : 12}$
$\mathbf{\mathit{x} = 8}$</td></tr>
</table>

23. ... *пъти по-малко* – първа обратна задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са две числа. Второто е 8 и е 12 пъти по-малко от първото. Кое е първото число?
Практическа задача. Иван и Георги си броят парите. Георги има 8 лева, които са 12 пъти по-малко от парите на Иван. Колко лева има Иван?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\mathbf{\mathit{x} : 12 = 8}$ $\quad \mathbf{\mathit{x}} = ?$
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 8 . 12}$
$\mathbf{\mathit{x} = 96}$</td></tr>
</table>

24. ... *пъти по-малко* – втора обратна задача

<table>
<tr><td colspan="2">Текст
Математическа задача. Дадени са числата 96 и 8. Колко пъти второто число е по-малко от първото?
Практическа задача. Иван има 96 лева, а Георги има 8 лева. Колко пъти парите на Георги са по-малко от парите на Иван?</td></tr>
<tr><td>Структурен модел

</td><td>Математически модел
$\mathbf{96 : \mathit{x} = 8}$ $\quad \mathbf{\mathit{x}} = ?$
Решение
$\mathbf{\mathit{x} = 96 : 8}$
$\mathbf{\mathit{x} = 12}$</td></tr>
</table>

Вместо заключение

Предложените структурни модели имат за цел да представят адекватно аритметичната задача на междинно равнище, т.е. на равнище, което е „между“ текста и математическия модел на задачата.

За по-голяма яснота при представяне на елементарните задачи чрез М- или Z-диаграми ще въведем и понятията „определена“ и „неопределена“ елементарна аритметична задача. Ако са известни операцията и две от числата в постановката на задачата и едно е неизвестно, то ще казваме, че задачата е „определена“. Това означава, че „определената“ задача има точно едно решение (при подходящ избор на числата). В диаграмата на определената задача две от квадратчетата са запълнени, а третото е празно. Ако са известни операцията и едно от числата в постановката на задачата и две числа са неизвестни, ще казваме, че задачата е „неопределена“. Това означава, че „неопределената“ задача не може да бъде решена еднозначно без допълнителна „информация“. В диаграмата на неопределената задача едно квадратче е запълнено, а две квадратчета са празни. Тъй като целта на решението е да се намерят неизвестните числа от постановката на задачата, то в диаграмата на решената задача няма празни квадратчета, т.е. и трите квадратчета са запълнени.

Разработката е отражение на конструктивистки подход в обучението по математика в началните класове и представлява първи етап от изследване по темата „Аритметичните задачи в началната училищна математика“. Уточняването на понятията „елементарна аритметична задача“, структура на елементарна аритметична задача и предложената класификация на елементарните задачи разкриват възможности за нов подход за изучаване на съставните аритметични задачите в началната училищна математика.

ЛИТЕРАТУРА

Върбанова, М. (2013). *Структурно-функционално моделиране в началната училищна математика*, Пловдив: Астарта.

Върбанова, М. (2013). *Методика на обучението по математика в началните класове*, Пловдив: Астарта.

Лалчев, З., (2003) Моделиране, класификация и графично моделиране на елементарни адитивни текстови задачи от типа множество-множество-множество. *Начално образование* №1.

Лалчев, З., Върбанова, М. (2014). Инверсията – метод в началната училищна математика. *Математика и информатика*, 57 (3), 215 – 246.

Лалчев, З., Върбанова, М. (2014). Два подхода за изучаване на уравнения в началната училищна математика. *Математика и информатика*, 57 (5), 502 – 517.

Ганчев, И. (1976). *За математическите задачи*, София: Народна просвета.

Пойа, Д., (1972). *Как да се решава задача* (*Един нов аспект на математическия метод*), София: Народна просвета.

Слепкань, З. И., (1983) *Психолого-педагогические основы обучения математике*, Киев: Радянська школа.

Эрдниев, П. М. & Эрдниев, Б. П. (1986). *Укрупнение дидактических единиц в обучении математике*, Москва: Просвещение

Манова, А., (2011). *Методика на обучението в решаване на текстови задачи*, София: Просвета.

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice).* Sofia: Association for the Development of Education.

REFERENCES

Varbanova, M. (2013). *Strukturno-funktsionalno modelirane v nachalnata uchilishtna matematika*, Plovdiv: Astarta.

Varbanova, M. (2013). *Metodika na obuchenieto po matematika v nachalnite klasove*, Plovdiv: Astarta.

Lalchev, Z., (2003) *Modelirane, klasifikatsiya i grafichno modelirane na elementarni aditivni tekstovi zadachi ot tipa mnozhestvo-mnozhestvo-mnozhestvo*. Nachalno obrazovanie№1.

Lalchev, Z., Varbanova, M. (2014). Inversiyata – metod v nachalnata uchilishtna matematika. *Matematika i informatika*, 57 (3), 215 – 246.

Lalchev, Z., Varbanova, M. (2014). Dva podhoda za izuchavane na uravneniya v nachalnata uchilishtna matematika. *Matematika i informatika*, 57 (5), 502 – 517.

Ganchev, I. (1976). *Za matematicheskite zadachi*, Sofiya: Narodna prosveta.

Poya, D., (1972). *Kak da se reshava zadacha (Edin nov aspekt na matematicheskiya metod)*, Sofiya: Narodna prosveta.

Slepkany, Z. I., (1983) *Psihologo-pedagogicheskie osnovay obucheniya matematike*, Kiev: Radyansyka shkola.

Erdniev, P. M. & Erdniev, B. P. (1986). *Ukrupnenie didakticheskih edinits v obuchenii matematike*, Moskva: Prosveshtenie

Manova, A., (2011). *Metodika na obuchenieto v reshavane na tekstovi zadachi*, Sofiya: Prosveta.

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice).* Sofia: Association for the Development of Education.

ELEMENTARY ARITHMETIC PROBLEMS. STRUCTURE AND MATHEMATICAL MODEL. CLASSIFICATION. WORD PROBLEMS

Abstract. The development is focused on the elementary arithmetic problems in primary school mathematics. For theoretical and practical purposes is suggested „a definition" of an elementary arithmetical problem and category structure of the problem is introduced. Based on „a list" of 12 kinds is developed logic-mathematical classification of elementary arithmetic problems in which included 24 categories. Each category is represented through an examples in which structural and mathematical models of the problems are shown. Mathematical and practical problems are considered as unity. The approach of constructivism in mathematical education in reflected in the development and it s the first stage of a research on „Arithmetic Problems in Primary School Mathematics".

✉ **Prof. Dr. Margarita Varbanova**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of VelikoTarnovo
3A, Arh. G. Kozarev Blvd.
5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria
E-mail: mvarbanova11@abv.bg

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**
Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1574 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Dr. Irina Voutova, Assist. Prof.**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Sofia
5, James Boucher Blvd
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: irinazv@abv.bg