

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНАТА МАТЕМАТИКА В УЧИЛИЩЕ

Сава Гроздев, Борислав Лазаров

Резюме. В статията е представен обзор на идеите за мястото и ролята на експеримента в обучението по математика.

Keywords: Socratic style, experimental approach, synthetic competence, individual educational trajectory.

1. Някои идеи от Великата дидактика на Коменски

В своя фундаментален труд *Великата дидактика* Коменски (Comenius, 1638) пише:

У учениците първо се разработват външните чувства (това е най-лесно), после паметта, по-нататък разбирането и, накрая, – създението. Именно в такава постепенност те следват едно след друго, тъй като знанието започва от чувственото възприятие, с помощта на въображението преминава в памет, а после чрез обобщение на единичното се формира разбиране на общото и накрая за уточнение на знанията за нещата, които са достатъчно понятни, се съставя съждение. (ibid, 28, VII)

Краткият цитат съдържа метод, като дава и когнитивно-психологическа обосновка за начина, по който протича образователният процес в резултат на метода. Тук виждаме ясно очертан план за построяване на образователна система, основана на емпиричното извеждане на познанието. Коменски обвързва образователния процес с ежедневния опит (ibid, 28, VI):

Учебният материал се разполага така, че първо да се усвои това, което е най-близко, след него – не толкова отдалеченото, после по-отдалеченото и накрая – най-отдалеченото. Затова, когато на учениците се предлагат правила (например правилата на логиката, правилата на риториката и др.), те трябва да се разяснят с примери, не далечни от тяхното разбиране – например богословски, политически и пр., а примери, заимствани от ежедневието. Иначе учениците няма да разберат нито правилото, нито приложението му.

Коменски разглежда включването на сензорно-моторния апарат на ученика като решаващ компонент в метода си:

Например слухът постоянно трябва да се съединява със зрението, езикът (речта) с дейност на ръцете. Следователно за това, което трябва да се знае, трябва не само да се разкаже, че да бъде възприето със слуха, но то трябва да се нарисува, за да може чрез зрението предметът да се запечата във въображение-

то. От своя страна нека учениците да се учат незабавно да произнасят на глас наученото и да го изразяват с дейности с ръцете си. Не трябва да се отстъпва нито от един предмет, докато той не се запечата достатъчно в ушите, очите, в ума и паметта. А за тази цел е полезно всичко, което обикновено се изучава във всеки клас, дали теореми или правила ..., да се изобразява нагледно на стената в същата аудитория. (ibid, 42)

Съвременното развитие на идеите на Коменски могат да се проследят в работите на Н. Розов и А. Боровских (Розов & Боровских, 2010). Принципиално важно, определящо и основополагащо според тях е, че за съдържателен анализ на дейността е необходимо тя да се разглежда в нейната цялост, структурирайки я чрез включените в нея функции, а не чрез действията, които се реализират в нея или чрез индивидите, които я осъществяват. Само такъв подход позволява да се разбере и да се осъзнае централният път в педагогиката за въвеждане на човека в дейност – не чрез сумиране на факти за едни или други обекти, не чрез старателно колекциониране на операционни знания, а чрез качествено изменение с нейна помощ на социалната ѝ функция и роля. Психологическият механизъм за ефективно придвижване по този път се формира още в предучилищна възраст, в детската игра. И от по-нататъшното развитие на този механизъм зависи в крайна сметка дали младият човек ще се превърне в обществено пълноценна личност или ще получи второстепенна роля. Най-общо казано всяка философия израства в съответна човешка дейност. Различните философски възгледи и идеи се раждат не от абстрактни откровения или мъдри силогизми, а от опитите да се разбере и реши съответна реална задача.

2. Методът на Сократ, представен в диалозите на Платон

До Коменски от векове битуват образователни системи, в които познанието има идеален характер. Исторически такъв стил произтича от Платон, чийто метод е диалектическата беседа. В своите *Диалози* Платон приписва авторството на диалектическия метод на Сократ (Платон, 382 пр.н.е.). Така до ден днешен е останало названието „сократов метод“. Съгласно Андреев (Андреев (1996), с. 49) методът представлява *лекция-беседа, в която учителят предварително премисля и предлага на слушателите както верни, така и неверни идеи, а учениците ги приемат или опровергават, показвайки по този начин своето възприемане на беседата*.

За разлика от Коменски, Платон порицавал всякакви позовавания на сетивното. Съгласно Плутарх, когото цитираме по Ван дер Варден (Ван дер Варден, 1968, с. 225):

Сам Платон порицал хората около Евдокс, Архит и Менехъм, които искали да сведат удвояването на куба до механични построения ..., защото по такъв начин се разрушава и унищожшава благото на геометрията, защото геометрията

се връща обратно към сетивното, вместо да се издигне над него и твърдо да се придържа към вечните, нематериални образи...

Можем да разберем позицията на Платон, доколкото той се е занимавал с елитарно образование. В неговата Академия не се допускал този, който не знаел геометрия. Резултатите от такова обучение обаче са впечатляващи, като вземем предвид даже само един неин випускник – Аристотел. Самият Аристотел критикувал питагорейците, че не правят достатъчна разлика между математическите и материалните неща. (ibid,c219)

Независимо от това, сократовият метод извежда познанието индуктивно, което, както посочихме, е основополагащо в идеите на Коменски. Ясно е, че до Платон стилът в обучението също се е основавал на опита с материалния свят.

В днешно време такъв стил може без усилие да се проследи, например в теориите на В. Давидов.

Согласно диалектико-материалистической философии, деятельность человека связана с творческим преобразованием предмета. Усвоение школьником тех или иных знаний в форме учебной деятельности всегда начинается с творческого преобразования усваиваемого им материала. Своеобразие учебной деятельности состоит в том, что в процессе ее осуществления школьник усваивает теоретические знания. Их содержанием является происхождение, становление и развитие какого-либо предмета. (Давидов,1991)

Приведеният кратък историческия преглед ясно показва лъкатушенето и препитането на дидактическите идеи. Това става и в днешни дни.

3. Какво е inquiry based education

Терминът inquiry-based science education (IBSE) е въведен в т. нар. доклад **Рокар**. *Inquiry-Based Science Education is a problem-based approach but goes beyond it with the importance given to the experimental approach.* (European Commission,2007, p. 9). В свободен превод, това е метод, основан на решаването на задачи, допълнен с експериментални дейности. Преди това в доклада се прави въвеждащо уточнение:

По определение „inquiry“ (изследване, проучване) е съзнателен процес за класифициране на проблем, оценяващи експерименти, разграничаване на алтернативи, планиране на проучване, изследване на хипотези, събиране на информация, създаване на модел, обсъждане в екип, професионален кръг и формиране на ясни изводи.

В обучението по математика вместо IBSE се използва изразът *Problem-Based Learning (PBL)*. Всъщност в математическото образование по-лесно се реализира методиката, основана на решаване на задачи, понеже в много случаи използването на експеримент е по-трудно. PBL описва такава среда, в която обучението се реализира чрез задачи, т.е. обучението започва с поставяне на задача за реша-

ване и то по такъв начин, че учениците трябва да добият ново знание преди да решат задачата. Вместо да отбележат правилен отговор те интерпретират задачата, събират нужната информация, идентифицират решения, оценяват възможности, представят заключения. (ibid.)

Напоследък от IBSE отпадна S(science). Преводът на inquiry based education като *изследователски ориентирано обучение* беше предложен от втория автор на настоящата статия в негов непубликуван доклад на семинара „Дидактическо моделиране“ от 31 май 2010 г. В доклада се визираше модел за обучение на учители, внедряващи системи за динамична геометрия в преподавателската си практика в горния курс (Lazarov, 2011). Доколко е удачен такъв превод извън контекста на доклада, ще проличи от следващите редове. У нас изразът *изследователски подход* в определени среди се свързва най-вече с приложение на информационни технологии (предимно динамичен софтуер) в обучението на ученици от прогимназията.

4. Няколко мнения за ефекта от ранно внедряване на експериментални дейности в математическото образование

Както се вижда от определението за IBSE, новаторският елемент е в разширяване на полето за експериментална работа по математика. В тази връзка възникват серия въпроси, основен измежду които е доколко може да се изгражда емпирично математическо познание. Изследванията на Батиста върху учене, основано на приложение на Geometer's Sketchpad, показват, че при работа с динамични конструкции учениците успяват да доведат до определено ниво на абстракция отделни действия, като интегрират тези абстракции в мисловни модели относно формата на геометрични фигури. Всичко това става в **пред-доказателственото** изучаване на геометрията. Батиста установява, че работейки с програмата Shape Maker ученическото мислене еволюира от визуално възприятие към мислене, основано на свойствата (property-based thinking). (Battista, 2001)

Това, разбира се, е сериозно движение в посока изграждане на база, върху която да се развива пълноценно математическо образование или поне определени математически знания, умения и компетенции (ЗУК). Друг е въпросът кои от така придобитите ЗУК са преносими в условията на систематичното изграждане на геометрията. В тази връзка Мариоти пише:

Математическите идеи, инкорпорирани в интерактивни системи, получават конкретност, която ги прави обработваеми (manipulable) и в същото време съдържанието им изкрystalизира от абстрактния процес, вследствие на взаимодействието със системата. В процеса на решаване на задачи учениците са способни да направят решение, което би могло да се разглежда като резултат

едновременно на абстракция и обобщение, но такова решение, както и свързаните с него процеси, е строго обвързано с конкретната задача и конкретната среда, в която е поставена задачата. С други думи, подобни абстракции са ситуативни... В частност, вербални описания могат да съдържат математически термини, които да са правилно използвани, но независимо от това смисълът им е относителен, отнасят се до ситуативни абстракции. (Mariotti, 2002)

По този начин едно от основните достойнства на математиката – универсалният характер на нейните резултати – остава на заден план в математическото образование. Връщането към египетско-вавилонски модел на математиката, по наше мнение, е сериозно цивилизационно отстъпление. Веднага трябва да поясним: не защитаваме тезата, че ранно въвеждане на експериментален подход е вредно; просто трябва да не се фаворизира твърде много ефектът от този подход, докато не се получат убедителни доказателства за предимствата му. Но това, което е ясно със сигурност, е, че изнесените резултати не дават основание да се говори за изследователски подход в ранна възраст в смисъла на inquiry based от доклада Рокар.

5. Развитието на средата за експериментиране

Съвременните интерактивни динамични среди дават широки възможности за експериментиране от най-ранна възраст. На практика математическото образование се обогати със своя лаборатория. Още в началото на 90-е години на миналия век стана ясен големият дидактически потенциал на подобни образователни среди (Laborde&Laborde, 1991). През 1993 г. се появи образователната среда на Geometer's Sketchpad и непосредствено след това една чудесна методическа разработка на покойния наш колега Любомир Давидов, за която нямаме сведения да е публикувана.¹

Истински разцвет на новаторски подходи и практики настъпи в края на 90-е години, когато компютрите станаха масово достъпни за учениците, а много и качествен компютърен софтуер беше със свободен достъп (Gardiner, 2002).² По това време положителният ефект от експерименталната дейност в обучението по математика се оценява и на институционално ниво. Ето какво е написано във френската програма за 10. клас:

Компютрите позволяват квази-експериментален подход в областта на числата и фигурите от равнината и пространството. Те стимулират по-активно

¹ Впоследствие тези материали бяха преработени за GeoGebra от Д. Димкова, като материалите, качени в мрежата, съдържаха и някои допълнения, предложени от Лазаров (към март 2013 г. тези материали не са активни).

² Гардинер преди средата Cabri години наред е използвал клипове – анимирани конструкции, които са прожектирани в клас (ibid.p11).

отношение и включване на учениците (в учебния процес, б.а.)... Компютърната среда позволява чрез експериментиране едно понятие да бъде разгледано от множество различни гледни точки; средата допринася за развитие на абстракциите, специфични за математиката, и води до по-дълбока рефлексия и по-добро разбиране. Цитираме по (Laborde, 2001).

От многобройните разработки в тази насока ще се спрем на т. нар. проект SINUS на Университета в Байройт (Baptist et al., 2012). Този проект започва с пилотно изследване през 1998 г., а е реализиран като масова педагогическа практика в периода 2003-2007 г. в Германия. Постигнатите впечатляващи резултати оказват влияние в няколко страни в Европа, включително у нас, включително сега. Централно място в декларирания стремеж към *ново преподаване на математиката* е експерименталният подход, реализиран в комбинирана среда – основно компютърни модули на основата на програмата GEONExT, а също водене на записки в обикновени тетрадки. *Към характеристиките на експерименталния подход към математиката се причисляват:*

- задачи с отворен отговор, позволяващи активно ангажиране на учениците;
- жива дискусия между учениците относно анализа, решението и интерпретирането на задачите;
- насърчаване на учениците да генерират въпроси и свои обобщения;
- прозрението, че математиката е стимулираща дисциплина, пълна с предизвикателства. (ibid., III, p 6)

В дидактическият инструментариум за експериментален достъп към математиката (*experimental access to Mathematics*) се набляга на независими подходи към ученето от страна на учениците (ibid., I, pp 16-17). Изброяват се 8 такива подхода, един от които е *learning by discovery*, което бихме превели като учене чрез *преоткриване*. Това е подходът (един от осем), съответстващ на *изследователски-ориентиран* подход в смисъла, който ние влягаме. Искаме да подчертаем, че методическите разработки са за ученици от горния курс. В същото време в долните класове се отделя голямо внимание на използването на манипулативи: кубчета, пръчици и т.н.

6. Преоткриването като подход в математическото образование

Тук ще стане дума за ролята на преоткриването като дидактически прием. Пръв, по наше сведение, Фройдентал го извежда в явен формат. Той има предвид ученикът да се поставя в ситуации, в които да се чувства откривател, например като се смени стила: вместо „съществува някакво δ “ да се казва „аз търся някакво δ “; вместо „от р следва q“ да се казва „от р аз извеждам q“ (Фройдентал, 1982, с. 86). Ключов похват е сократовият метод, като се има предвид съвремен-

ната форма (например, както е описана от Андреев – вж. по-горе). В българската педагогическа практика такъв похват е използван от изявени учители, например чрез подходящи системи от задачи (Савова&Димитрова, 2009). При определени условия преоткриването в рамките на решаването на задачи от висша трудност прераства в евристика с дълготраен положителен ефект, каквито многобройни случаи са описани в (Grozdev, 2007).

Не по-малко са познатите ни случаи на действително нови резултати, получавани от ученици. Това обаче **не може да става в клас**. Индивидуалният подход в извънкласни форми е обширна тема, която не е предмет на настоящата статия.

Преоткриване на съдържателни математически резултати в класно-урочни форми не сме регистрирали даже в класове от най-най-най-високо ниво, каквото може да си представим в реално училище. Напротив, забелязване на инварианти, на ГМТ и други съществени елементи от дадена тема са присъщи на изявените ученици при работа в динамична геометрична среда, най-вече в елитни математически гимназии. Много силен евристичен ефект има работата по създаване на динамически устойчиви конструкции, което при работа в клас изисква внимателно формулиране на проблемната ситуация, както и гъвкав подход в сократов стил от страна на учителя.

7. Вместо заключение

Ще приведем резултата от един експеримент, проведен в две групи от по 50 ученици (статистически значима извадка). Едната група е използвала графични калкулатори, другата не е ползвала (друго освен лист и молив). Трябвало е да се пресметне границата на $\ln x + 10 \sin x$ при $x \rightarrow +\infty$. В групата без калкулатори всички ученици отговорили вярно; в групата с графични калкулатори само 10% от учениците са дали верен отговор. (Guin & Trouche, 1999)

С този пример нямаме намерение да хвърлим сянка върху положителния ефект от експерименталния подход в горните курсове. Искаме да подчертаем, че: 1) придобиваните ЗУК са ситуативни; 2) преносът на ЗУК е контекстно обвързан; 3) трябва много да внимаваме какво преоткриват подопечните ни „изследователи“.

ЛИТЕРАТУРА

- Андреев, М. (1996). *Процесът на обучението*. София: УИ „Св. Кл. Охридски“.
- Давыдов, В. (1991). Учебная деятельность: состояние и проблемы исследования. *Вопросы психологии*. № 6, ноябрь-декабрь.
- Платон (1986). *Диалоги*. Москва: Мысль.
- Фройденталь, Г. (1982). *Математика как педагогическая задача. Часть I*. Москва: Просвещение. Москва.

- Розов, Н. & Боровских, А. (2010). *Деятельностные принципы в педагогике и педагогическая логика*. Москва: МАКС Пресс.
- Савова, Б. & Димитрова, Н. (2009). Изследователски ориентирано обучение с традиционни средства. *Дидактическо моделиране. Том 3*.
- Baptist, P., Miller, C. & Raab, D. (eds.). (2011). *Towards new teaching in Mathematics, Part I, II, III*. Bayreuth: University of Bayreuth.
- Battista, M. (2001). Shape Makers: A computer environment that engenders students' construction of geometric ideas and reasoning. In: Tooke, J. & Henderson, N. (eds) (2001). *Using information technology in Mathematics education*. NY: Haworth Press, pp 105-120.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tool into mathematical instruments: the case of calculators, *International Journal of computer for mathematical learning*, 3 (3), pp 195-227.
- Grozdev, S. (2007). *Fof high achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE.
- Laborde, C. & Laborde, J. M. (1991). Problem solving in geometry: from microworlds to intelligent computer environments, Ponte et al. *Mathematical problem solving and new information technologies, Nato ASI series F, vol. 89*, pp 177-192.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp 283–317.
- Lazarov, B. (2011). *Socratic style teaching and synthetic competence building in extracurricular Mathematics education*. Astana: DARYN.
- Mariotti, MA. (2002). *Influence of technologies advances on students' math learning*. In *English et al. (eds.) Handbook of International Research in Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates.

БЕЛЕЖКИ

- Comenius (1638). *Didactica magna*. Цитира се по Коменский, Я. *Великая дидактика*. http://jorigami.ru/PP_corner/Classics/Komensky/Komensky_Yan_Amos_Velikaya_didakt_izbr.htm#_Toc237611321
- European Commission (2007). Science Education now. http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-roc-card-on-science-education_en.pdf (active in Feb 2013)

EXPERIMENTAL MATHEMATICS AT SCHOOL

Abstract. The paper presents a review of ideas concerning the place and the role of experiment in Mathematics teaching.

Sava Grozdev

✉ Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Borislav Lazarov

✉ Associated Professor, Doctor in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: byl@abv.bg