

## ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА ОРТОЦЕНТРИЧНИЯ ТРИЪГЪЛНИК

Хаим Хаимов

**Резюме.** Авторът предлага обобщение на ортоцентричния триъгълник. Обобщеният триъгълник е перспективен на триъгълника  $ABC$  и зависи от произволна точка на Чева  $P$ . Наричаме го  $H$  – триъгълник на точката  $P$ . Изображението, което на точка на Чева  $P$  съпоставя персептора на  $H$  – триъгълника на  $P$  и триъгълника  $ABC$ , наричаме  $H$  – изображение на  $P$ . Показваме, че  $H$  – изображението е композиция на две известни преобразувания на точки: допълнение и изогонална спрегнатост. Намираме образите на някои забележителни точки при  $H$  – изображението. Резултатите в тази статия могат да бъдат използвани за тестване на компютърната програма „Откривател“.

**Keywords:** generalization of the orthic triangle, perspective triangle, perspector, notable points

Добре е известно, че триъгълникът с върхове петите на височините на даден неправоеъглен триъгълник са нарича ортоцентричен триъгълник. Ортоцентричният триъгълник притежава интересни и разнообразни свойства. Едно от основните свойства на ортоцентричния триъгълник е, че той е перспективен с изходния триъгълник  $ABC$ , като персепторът е ортоцентърът. Ще припомним, че два триъгълника в равнината се наричат перспективни, ако правите, преминаващи през съответните върхове, се пресичат в една точка. Тази точка се нарича център на перспективата, или персептор, за по-кратко.

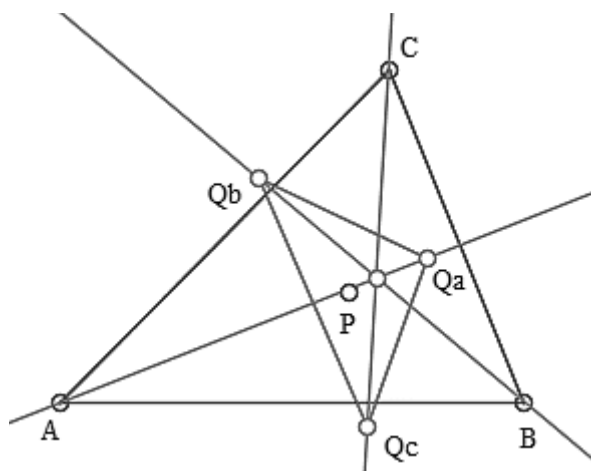
Тук ще разгледаме едно обобщение на ортоцентричния триъгълник. Обобщеният триъгълник също е перспективен на изходния триъгълник  $ABC$ . В тази статия с  $P$  ще бележим произволна точка на Чева. Обобщеният триъгълник зависи от произволна точка на Чева  $P$ . Ако точката на Чева е ортоцентърът, то обобщеният триъгълник съвпада с ортоцентричния триъгълник. Ще наричаме обобщения триъгълник  $H$  – триъгълник на  $P$ . Персепторът на  $H$  – триъгълника на  $P$  и триъгълника  $BC$  ще наричаме  $H$  – точка на  $P$ . Изображението, което на точка на Чева  $P$  съпоставя  $H$  – точката на  $P$ , ще наричаме  $H$  – изображение на  $P$ . Както

ще видим,  $H$  – изображението може да бъде представено като композиция на две известни изображения на точки – допълнение и изогонална спрегнатост. Образите на забележителни точки на триъгълника при  $H$  – изображението са също забележителни точки на триъгълника. Част от забележителните точки – образи, по мнението на автора, не са разглеждани досега в литературата. Построяването на новите забележителни точки с линейка и пергел не представлява трудност.

Дефинираме  $H$  – триъгълника на точката  $P$ , както следва. Нека  $\Delta A_1 B_1 C_1$  е триъгълникът на Чева на точката  $P$ . Трите точки  $A$ ,  $B$  и  $B_1$  дефинират окръжност и трите точки  $A$ ,  $C$  и  $C_1$  дефинират още една окръжност. Тези две окръжности се пресичат в точката  $A$  и в още една точка, която означаваме с  $Q_a$ . Аналогично дефинираме точките  $Q_b$  и  $Q_c$ . Тези три точки  $Q_a$ ,  $Q_b$  и  $Q_c$  са върховете на  $H$  – триъгълника на точката  $P$ .

Ще отбележим, че така дефинираните точки  $Q_a$ ,  $Q_b$  и  $Q_c$  са брокариани съответно на четириъгълниците  $BCB_1C_1$ ,  $CAC_1A_1$  и  $ABA_1B_1$  (Хаимов, 2005), (Хаимов, 2006) и като такива, имат различни забележителни свойства.

**Теорема 1.** За всяка точка  $P$   $H$  – триъгълникът на  $P$  и  $\Delta ABC$  са перспективни.



Фигура 1

Фигура 1 илюстрира Теорема 1. На фиг. 1 точката  $P$  е произволна точка на Чева в равнината на  $\Delta ABC$ . Триъгълникът  $Q_a Q_b Q_c$  е  $H$  – триъгълникът на точката  $P$ . Правите  $AQ_a$ ,  $BQ_b$  и  $CQ_c$  се пресичат в една точка, която е  $H$  – точката на точката  $P$ .

**Теорема 2.** Нека точка  $P$  има барицентрични координати  $(u : v : w)$ . Тогава  $H$  – точката на  $P$  (т.е. перспекторът на  $H$  – триъгълника на  $P$  и триъгълника  $ABC$ ) има барицентрични координати  $\left( \frac{a^2}{v+w} : \frac{b^2}{w+u} : \frac{c^2}{u+v} \right)$ .

**Теорема 3.**  $H$  – изображението е композиция на допълнение и изогонална спрегнатост.

*Доказателство.* Нека точката  $P$  има барицентрични координати  $(x : y : z)$ . Тогава допълнението на  $P$  има барицентрични координати  $(y+z : z+x : x+y)$ , а изогонално спрегнатата точка на  $P$  има барицентрични координати  $\left( \frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \right)$ . Оттук следва, че изогонално спрегнатата точка на допълнението на точка  $P = (u : v : w)$  има барицентрични координати  $\left( \frac{a^2}{v+w} : \frac{b^2}{w+u} : \frac{c^2}{u+v} \right)$ .

Теорема 3 позволява да намерим образите на ред забележителни точки на триъгълника при  $H$  – изображението.

**Теорема 4.** Ортоцентърът на произволен неправиоъгълен триъгълник е двойна точка на  $H$  – изображението.

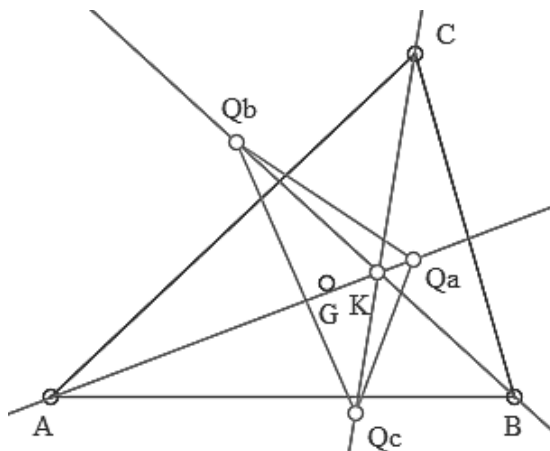
*Доказателство.* Първо намираме допълнението на ортоцентъра. Това е центърът  $O$  на описаната окръжност. (Паскалев & Чобанов, 1985). След това намираме изогонално спрегнатата точка на точката  $O$ . Това е ортоцентърът  $H$  – (Паскалев & Чобанов, 1985). Следователно, ортоцентърът  $H$  е двойна точка на  $H$  – изображението.

**Теорема 5.** Образът на медицентъра на триъгълника при  $H$  – изображението е точката на Лемоан.

*Доказателство.* Дополнението на медицентъра е самият медицентър. Изогонално спрегнатата точка на медицентъра е точката на Лемоан (Паскалев & Чобанов, 1985).

Фигура 2 илюстрира Теорема 5. На фигура 2 точка  $G$  е медицентърът на триъгълника  $ABC$ , триъгълникът  $O_a O_b O_c$  е  $H$  – триъгълникът на медицентъра  $G$ , точка  $K$  е точката на Лемоан, правите  $AK$ ,  $BK$  и  $CK$  са симедианите. Тогава точките  $O_a$ ,  $O_b$  и  $O_c$  лежат върху симедианите.

**Теорема 6.** Образът на точката на Нагел на триъгълника при  $H$  – изображението е центърът на вписаната окръжност.



Фигура 2

*Доказателство.* Допълнението на точката на Нагел  $N$  е центърът на вписаната окръжност  $I$ . Изогонално спрегнатата точка на  $I$  е самата точка  $I$  (Паскалев & Чобанов, 1985).

Ще отбележим, че ако знаем барицентричните координати на една точка, по теорема 3 лесно можем да намерим барицентричните координати на образа на точката при  $H$  – изображението. Например центърът на вписаната окръжност има барицентрични координати  $(a:b:c)$ , откъдето образът на тази точка при  $H$  – изображението има барицентрични координати  $\left(\frac{a^2}{b+c} : \frac{b^2}{c+a} : \frac{c^2}{a+b}\right)$ .

Накрая ще приведем барицентричните координати на върховете на  $H$  – триъгълника  $O_a O_b O_c$  на медицентъра:  $Q_a = (b^2 + c^2 - 2a^2 : 3b^2 : 3c^2)$ ,  $Q_b = (3a^2 : c^2 + a^2 - 2b^2 : 3c^2)$ ,  $Q_c = (3a^2 : 3b^2 : a^2 + b^2 - 2c^2)$ .

А ето и една задача за самостоятелна работа.

**Задача.** Да се докаже, че ортоцентърът е единствената двойна точка на  $H$  – изображението.

В заключение, ще отбележим, че с помощта на компютърната програма „Откривател“ (Гроздев & Деков, 2013) би могло да се изследват връзките на забележителни точки на триъгълника с  $H$  – изображения на дадени забележителни точки, както и да бъдат открити и други триъгълници, перспективни с  $H$  – триъгълника на медицентъра.

## ЛИТЕРАТУРА

- Хаимов, Х. (2005). Брокариани на четириъгълник, *Математика*, 5.
- Хаимов, Х. (2006). Брокарианите забележителни точки в четири-ъгълника, *Математика и информатика*, 6.
- Паскалев, Г. & И. Чобанов (1985). *Забележителни точки в триъгълника*, София: Народна просвета.
- Гроздев, С. & Д. Деков (2013). Някои приложения на компютърната програма „Откривател“, *Математика и информатика*, 5.

## REFERENCES

- Haimov, H. (2005). Brokariani na chetiriagalnik, *Matematika*, 5.
- Haimov, H. (2006). Brokarianite zabelezhitelni tochki v chetiriagalnika, *Matematika i informatika*, 6.
- Paskalev, G. & I. Chobanov (1985). *Zabelezhitelni tochki v triagalnika*, Sofiya. Narodna prosveta.
- Grozdev, S. & D. Dekov (2013). Nyakoi prilozheniya na kompyutarnata programa „Otkrivatel“, *Matematika i informatika*, 5.

## A GENERALIZATION OF THE ORTHOCENTRIC TRIANGLE

**Abstract.** The author proposes a generalization of the orthic triangle. The generalized triangle is defined by an arbitrary point of Ceva  $P$  and it is in perspective with the reference triangle  $ABC$ . We call it the  $H$  – triangle of point  $P$ . We call the  $H$  – transform of point  $P$  the mapping which assigns to point  $P$  the perspector of the  $H$  – triangle of point  $P$  and triangle  $ABC$ . We show that the  $H$  – transform is composition of two known transforms: the complement and the isogonal conjugate. We identify the images of a few remarkable points under the  $H$  – transform. The results in this paper could be used for testing of the computer program “Discoverer”.

✉ **Haim Haimov**  
16, Bratia Shkorpil Str.  
9000 Varna, Bulgaria