

ЕДНО НЕРАВЕНСТВО ЗА ТРАПЕЦ

Веселин Ненков

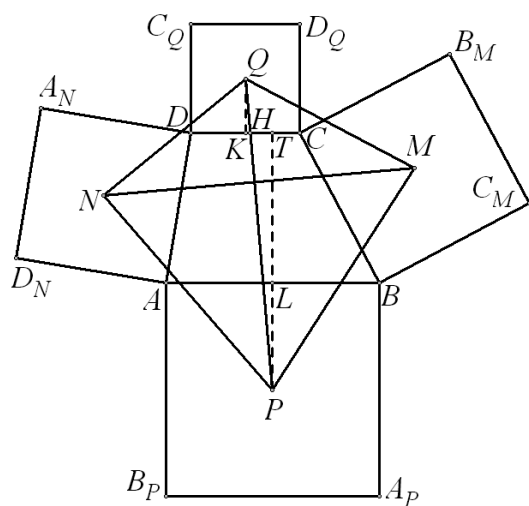
Резюме. Тази бележка е посветена на обобщението на една задача за трапец от сп. „Математика и информатика“, 2000 г.

Keywords: convex quadrilateral, square, rhombus, trapezoid, area.

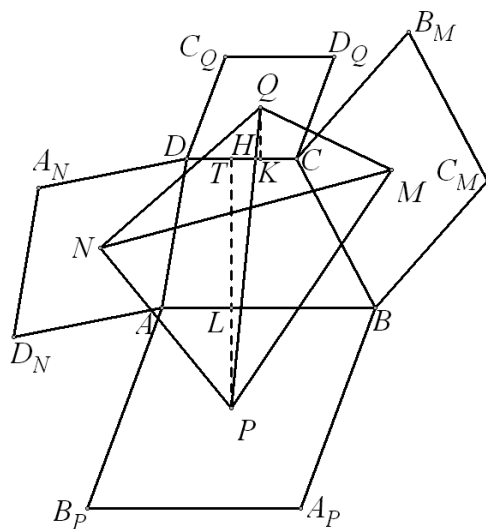
В следващите редове ще приведем едно обобщение на следната:

Задача 1. Върху страните AB , BC , CA и DA на произволен трапец $ABCD$ външно за трапеца са построени квадрати с центрове съответно P , M , Q и N . Да се докаже неравенството $S_{PMQN} \geq 2 \cdot S_{ABCD}$ и да се определи при какви условия за трапеца се достига равенство (Фиг. 1) (Математика и информатика, 2000).

Тази задача, чийто автор е Валери Цеков, е публикувана като задача 2 в рубриката „Задачи по математика“ на списание „Математика и информатика“, кн. 1, 2000 г. В рубриката „Решения на задачите“ на същото списание (кн. 2, 2001 г.) (Математика и информатика, 2001) е публикувано решението на автора, което използва аналитични средства. Тук ще решим следната по-обща:



Фиг. 1



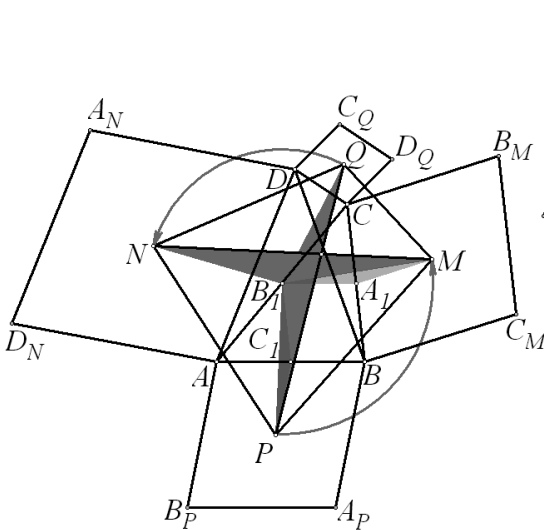
Фиг. 2

Задача 2. Върху страните на произволен трапец $ABCD$ външно за трапеца са построени ромбове така, че ъглите на два ромба, прилежащи на един и същи ъгъл на трапеца, са равни. Ако ромбовете, построени върху страните AB , BC , CA и DA на трапеца, имат центрове съответно P , M , Q и N , а равните им ъгли са с мярка α , да се докаже неравенството $S_{PMQN} \geq 2 \cdot S_{ABCD} \cdot \sin^2 \alpha$ и да се определи при какви условия за трапеца се достига равенство (Фиг. 2).

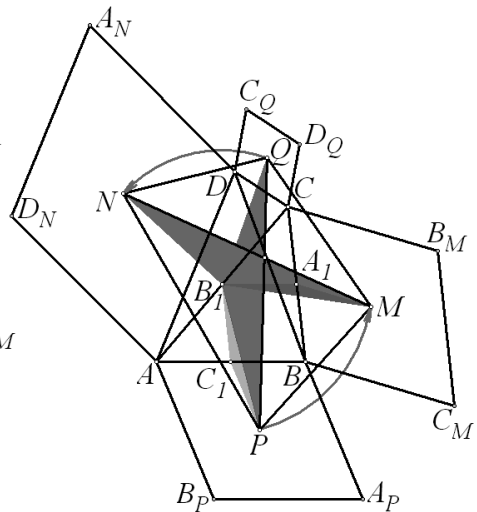
Ще покажем едно решение на тази задача, което използва преди всичко геометрични съображения. Преди това ще докажем следната известна

Теорема. Върху страните на изпъкнал четириъгълник външно са построени ромбове така, че ъглите на два ромба, прилежащи на един и същ ъгъл на четириъгълника, са равни. Тогава отсечките, съединяващи центровете на противоположните ромбове, са равни, а ъглите между тях са равни на ъглите на ромбовете. (Шарыгин, 1986)

Доказателство: Нека е даден произволен изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Означаваме с A_1 , B_1 и C_1 средите съответно на отсечките BC , CA и AB , а с P , M , Q и N означаваме центровете на ромбовете, построени съответно върху страните AB , BC , CD и DA на четириъгълника. Нека освен това ромбовете, прилежащи на върха B , имат ъгли с мярка α при този връх. От въведените означения на Фиг. 3 и Фиг. 4 непосредствено следват равенствата:



Фиг. 3



Фиг. 4

$$(1) \quad PC_1 = B_1A_1 = \frac{AB}{2}, \quad C_1B_1 = A_1M = \frac{BC}{2}.$$

В зависимост от стойностите на $\angle ABC$ и α са възможни следните два случая: 1) $\angle ABC + \alpha < 180^\circ$ (Фиг. 3) и 2) $\angle ABC + \alpha > 180^\circ$ (Фиг. 4). В случай 1) от Фиг. 3 се вижда, че раменете на $\angle PC_1B_1$ са успоредни на раменете на $\angle A_pBC = \angle ABC + \alpha$, а раменете на $\angle MA_1B_1$ са успоредни на раменете на $\angle ABC_M = \angle ABC + \alpha$. Така получаваме, че в случай 1) са изпълнени равенствата

$$(2) \quad \angle PC_1B_1 = \angle B_1A_1M = \angle ABC + \alpha.$$

Аналогично от Фиг. 4 се вижда, че в случай 2) са изпълнени равенствата

$$(3) \quad \angle PC_1B_1 = \angle B_1A_1M = 360^\circ - (\angle ABC + \alpha).$$

От (1), (2), (3) и първи признак за еднаквост на триъгълници следва $\triangle PC_1B_1 \cong \triangle B_1A_1M$. Следователно

$$(4) \quad PB_1 = MB_1,$$

$$(5) \quad \angle B_1PC_1 = \angle A_1B_1M, \quad \angle PB_1C_1 = \angle B_1MA_1.$$

В случай 1) от Фиг. 3, (2) и (5) се получават равенствата

$$\begin{aligned} \angle PB_1M &= \angle PB_1C_1 + \angle C_1B_1A_1 + \angle A_1B_1M = \angle B_1MA_1 + \angle C_1B_1A_1 + \angle A_1B_1M = \\ &= (\angle B_1MA_1 + \angle A_1B_1M) + \angle C_1B_1A_1 = 180^\circ - (\angle ABC + \alpha) + \angle ABC = 180^\circ - \alpha. \end{aligned}$$

В случай 2) от Фиг. 4, (3) и (5) се получават равенствата

$$\begin{aligned} \angle PB_1M &= \angle C_1B_1A_1 - (\angle PB_1C_1 + \angle A_1B_1M) = \angle C_1B_1A_1 - (\angle B_1MA_1 + \angle A_1B_1M) = \\ &= \angle ABC - \{180^\circ - [360^\circ - (\angle ABC + \alpha)]\} = 180^\circ - \alpha. \end{aligned}$$

Последните пресмятания показват, че и в двата случая е изпълнено равенството

$$(6) \quad \angle C_1B_1A_1 = 180^\circ - \alpha.$$

Ясно е, че аналогично на (4) и (6) се получават равенствата

$$(7) \quad QB_1 = NB_1, \quad \angle QB_1N = 180^\circ - \alpha.$$

Сега от (4), (6) и (7) се забелязва, че при ротация с център точката B_1 и ъгъл на въртене $180^\circ - \alpha$ триъгълникът B_1PQ отива в триъгълника B_1MN (Фиг. 3, 4). Следователно $PQ = MN$ и единият от ъглите между отсечките PQ и MN е равен на $180^\circ - \alpha$, а оттук – другият ъгъл между тях е равен на α . С това теоремата е доказана.

Решение на задача 2: С помощта на току-що доказаната теорема ще получим едно решение на задача 2. Нека $AB \parallel CD$, $PT \perp CD$ и $QK \perp CD$, като PT пресича правите AB и CD съответно в точките L и T , а $K \in CD$ (Фиг. 1, 2). От правоъгълните триъгълници ABP и CDQ лесно се вижда, че са изпълнени равенствата:

$$(8) \quad PL = \frac{AB}{2} \cdot \sin \alpha, \quad QK = \frac{CD}{2} \cdot \sin \alpha.$$

От теоремата следва, че за лицето на четириъгълника $PMQN$ е в сила:

$$(9) \quad S_{PMQN} = \frac{1}{2} PQ^2 \sin \alpha.$$

От фиг. 2 (Фиг.1), (8), неравенството между средното аритметично и средно-геометрично (Гроздев, 2005), както и формулата за лице на трапец получаваме последователно:

$$\begin{aligned} PQ &= PH + HQ \geq PT + KQ = PL + LT + KQ = \frac{AB}{2} \cdot \sin \alpha + LT + \frac{CD}{2} \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{AB + CD}{2} \cdot \sin \alpha + LT \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{AB + CD}{2} \cdot LT \cdot \sin \alpha} = 2 \cdot \sqrt{S_{ABCD} \cdot \sin \alpha}, \text{ т.е.} \\ (10) \quad PQ &\geq 2 \cdot \sqrt{S_{ABCD} \cdot \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Сега от (9) и (10) следва неравенството $S_{PMQN} \geq 2 \cdot S_{ABCD} \cdot \sin^2 \alpha$. Равенство се достига точно когато $K \equiv H \equiv T$ и $LT = \frac{AB + CD}{2} \cdot \sin \alpha$, т.е. когато трапецът $ABCD$ е равнобедрен и има височина, равна на средната му отсечка, умножена със $\sin \alpha$. В случая, когато ромбовете са квадрати, височината е равна на средната отсечка на трапеца.

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. (2005). *Подготовка за Европейско кенгуру*. София: СМБ (ISBN 954-8880-20-2), 220 стр.
- Сп. *Математика и информатика* (2000), 1, 74. Задачи по математика, Задача 2.
- Сп. *Математика и информатика* (2001), 2, 74. Решения на задачите от кн.1, 2000 г.
- Шарыгин, И. Ф.(1986). *Задачи по геометрии, Планиметрия*. Москва: Наука, 74, зад. 303.

A GENERALIZATION OF AN INEQUALITY FOR TRAPEZOID

Abstract. The present note is dedicated to a generalization of a problem from „Mathematics and Informatics“ journal, 2000.

Veselin Nenkov

✉ PhD, Associated Professor
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street
Lovech
E-mail: vnenkov@mail.bg