

ЕДНА ЗАДАЧА – НЯКОЛКО „ЕЛЕМЕНТАРНИ“ РЕШЕНИЯ

Юлия Нинова¹, Веселка Михова²

Резюме. Статията е посветена на една задача от кандидат-студентския изпит по математика в СУ „Св. Климент Охридски“, проведен на 11 юли 2011 г. В нея се анализира и коментира публикуваното примерно решение (<http://www.fmi.uni-sofia.bg/priem/ksi2011-2tema2-reshenia.pdf>) и се дават четири “елементарни” решения, в които се използват познания по математика при изучаването ѝ като профилиращ предмет.

Keywords: function, graphical representation, continuity, derivative, trigonometric equation.

Задача. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които уравнението

$$(1) \quad a \sin x \cos x = \sin x - \cos x$$

има точно два различни корена в интервала $[0, \pi]$.

Разсъждения върху авторското решение

Непосредствено се проверява, че стойностите 0 , $\frac{\pi}{2}$ и π за аргумента x не са решения на уравнение (1) за никоя стойност на параметъра a . Следователно (1) е еквивалентно на уравнението

$$(2) \quad \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} - a = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Да разгледаме помощната функция

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} - a, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

$$(i) \quad \text{Нека } x \in I, \text{ където } I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Функцията $\cos x$ е положителна и строго монотонно намаляваща, а функцията $\frac{1}{\cos x}$ е строго монотонно растяща; функцията $\sin x$ е положителна и строго-

¹ Тази работа е частично финансирана от договор 105/2012 СУ.

² Тази работа е частично финансирана от договор 026/2012 СУ.

монотонно растяща; функцията $\frac{1}{\sin x}$ е строго монотонно намаляваща, а функцията $-\frac{1}{\sin x}$ е строго монотонно растяща. Следователно в интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща като сбор на такива функции. Освен това тя е непрекъсната.

Понеже $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$, то в разглеждания интервал има точно една стойност x_0 , зависеща (евентуално) от параметъра a , за която $f(x_0) = 0$ (Теорема за междинните стойности).

От направените разсъждения следва, че уравнение (2), респ. (1), има точно едно решение в интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ за всяка стойност на параметъра a .

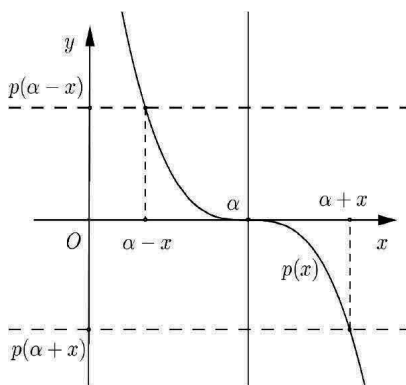
Коментар

Свойствата четност и нечетност на една функция са свързани със симетрии на графиката на функцията спрямо избрана координатна система. В средното училище се изучават само симетриите на четните функции относно ординатната ос и на нечетните функции спрямо началото на координатната система.

Графиката на една функция обаче може да бъде симетрична и спрямо права, успоредна на ординатната ос, или спрямо точка, различна от координатното начало.

Графиката на една функция $p(x)$ е симетрична спрямо точка с координати $(\alpha, 0)$, ако функцията е дефинирана в интервала $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, симетричен спрямо точката $x = \alpha$, и (черт. 1а)

$$p(\alpha - x) = -p(\alpha + x), \quad \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$



Чертеж 1а

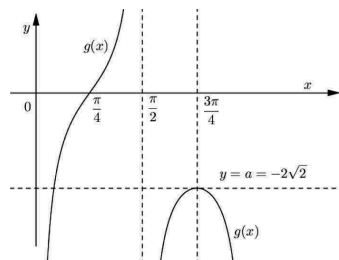
Да разгледаме непрекъснатата функция

$$(4) \quad g(x) = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

В интервала I тя е монотонно растяща и за нея е в сила, че $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty$,

т.е. правите с уравнение $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$ са вертикални

асимптоти за клоната от графиката на функцията $g(x)$ в I (черт.2).



Черт. 2

От друга страна уравнението $g(\alpha - x) = -g(\alpha + x)$ е еквивалентно на уравнението

$$\frac{1}{\cos(\alpha - x)} - \frac{1}{\sin(\alpha - x)} = -\frac{1}{\cos(\alpha + x)} + \frac{1}{\sin(\alpha + x)}$$

и след непосредствени еквивалентни тригонометрични преобразувания получаваме, че е еквивалентно на уравнението

$$(\cos \alpha - \sin \alpha) \left(\cos 2x - 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right) = 0,$$

където $\cos 2x - 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) < 0$ за всички стойности на аргумента x от I .

Необходимо и достатъчно условие да е изпълнено последното равенство за всяко $x \in I, (\alpha - x) \in I, (\alpha + x) \in I$ е $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 0$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Следователно клонът от графиката на функцията $g(x)$ в интервала I има за център на симетрия точката с координати $\left(\frac{\pi}{4}, 0 \right)$ (черт.2), защото:

– точката $x = \frac{\pi}{4}$ е средата на интервала I , т.е. I е симетричен спрямо нея;

$$-\forall \left(\frac{\pi}{4} - x \right), \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \in I \Rightarrow g \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = -g \left(\frac{\pi}{4} + x \right).$$

Съответният клон на функцията $f(x) = g(x) - a$ в интервала I има за център на симетрия точката с координати $\left(\frac{\pi}{4}, -a \right)$.

Извод

За всяка стойност на параметъра $a \in \mathbb{R}$ правата с уравнение $y = a$, успоредна на абсцисната ос, пресича клона от графиката на функцията $g(x)$ в интервала I точно в една точка, точката в която $f(x) = g(x) - a = 0$.

(ii) Нека $x \in J$, където $J = \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$.

За функцията $f(x)$ в този интервал е в сила зависимостта $f(x) = f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

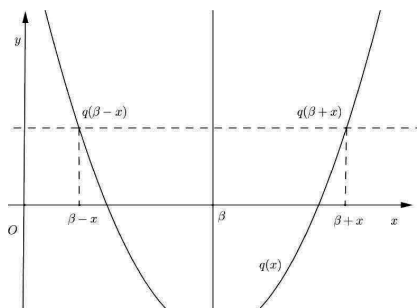
(Тази връзка между стойностите на функцията е дадена в авторското решение без анализ на свойствата, които водят до нея.) От това равенство следва, че за всяка стойност на аргумента $x \in J$, различна от $\frac{3\pi}{4}$, уравнението (2) има две различни решения. (Това твърдение също се нуждае от обосновка. Функцията $f(x)$ е само непрекъсната в този интервал.)

Единствено при $x = \frac{3\pi}{4}$ уравнението (2) има едно решение, за което стойността на параметъра a е $-2\sqrt{2}$.

Коментар

Графиката на една функция $q(x)$ е симетрична спрямо правата с уравнение $x = \beta$, ако функцията е дефинирана в интервала $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, симетричен спрямо точката $x = \beta$, и (черт.1б) $q(\beta - x) = q(\beta + x)$, $\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

В интервала J функцията $g(x)$, дефини-



Черт. 1б

рана с равенството (4), не е монотонна и приема само отрицателни стойности.

Понеже $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}} g(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \pi, x < \pi} g(x) = -\infty$, то правите с уравнения $x = \frac{\pi}{2}$

и $x = \pi$ са вертикални асимптоти за клона от графиката на $g(x)$ в J (черт.2). От друга страна уравнението $q(\beta - x) = q(\beta + x)$ е еквивалентно на уравнението

$$\frac{1}{\cos(\beta - x)} - \frac{1}{\sin(\beta - x)} = \frac{1}{\cos(\beta + x)} - \frac{1}{\sin(\beta + x)}$$

и след непосредствени еквивалентни тригонометрични преобразувания получаваме, че е еквивалентно на уравнението

$$(\cos \beta + \sin \beta) \left(\cos 2x - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) \right) = 0,$$

където $\cos 2x - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) < 0$ за всички стойности на аргумента x от J .

Необходимо и достатъчно условие да е изпълнено последното равенство за всяко $x \in J, (\beta - x) \in J, (\beta + x) \in J$ е $\cos \beta + \sin \beta = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right) = 0$, т.е. $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

Следователно клонът от графиката на функцията $g(x)$ в интервала J има за ос на симетрия правата с уравнение $x = \frac{3\pi}{4}$ (черт.2), защото:

– точката $x = \frac{3\pi}{4}$ е средата на интервала J , т.е. J е симетричен спрямо нея;

$$- \forall \left(\frac{3\pi}{4} - x \right), \left(\frac{3\pi}{4} + x \right) \in J \Rightarrow g \left(\frac{3\pi}{4} - x \right) = g \left(\frac{3\pi}{4} + x \right).$$

Правата с уравнение $x = \frac{3\pi}{4}$ е ос на симетрия и за клона от графиката на функцията $f(x) = g(x) - a$ в интервала J .

Извод

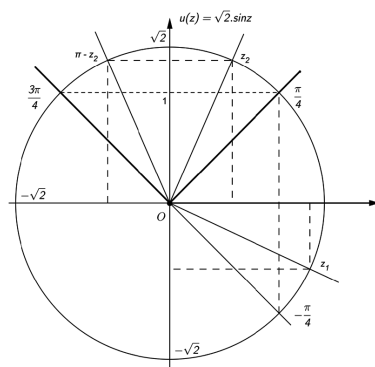
Правата с уравнение $y = a$, успоредна на абсцисната ос, пресича клона от графиката на функцията $g(x)$ в интервала J точно в две различни точки за

всяко $x \neq \frac{3\pi}{4}$ и в тези точки уравнението $f(x) = g(x) - a = 0$ има две различни решения. При $x = \frac{3\pi}{4}$ правата с уравнение $y = a$ се допира до клона от графиката на $g(x)$ и в тази точка уравнението $f(x) = g(x) - a = 0$ има точно едно решение. Понеже $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) - a = 0$, то $a = -2\sqrt{2}$. Щом $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, то $\left|x - \frac{3\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{4}$ и точките $z = \frac{3\pi}{4} - x$ са от интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ или от интервала $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. Понеже правата $x = \frac{3\pi}{4}$ ($z = 0$) е ос на симетрия на графиката на функцията $f(x)$, то са в сила еквивалентните равенства

$$f\left(\frac{3\pi}{4} - z\right) = f\left(\frac{3\pi}{4} + z\right) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

Вариант I за решение на задачата

Едно типично полагане, което обикновено се отработва с учениците при решаване на тригонометрични уравнения, е $u(x) = \sin x - \cos x$, или $u(x) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Тъй като по условие $0 \leq x \leq \pi$ и стойностите $0, \frac{\pi}{2}$ и π за аргумента x не са решения на уравнението (1) за никоя стойност на параметъра a , то $u \in (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$.



Чертеж 3

Нека положим за момент $z = x - \frac{\pi}{4}$, като $x \in (0, \pi) \Leftrightarrow z \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, и да анализираме функцията $u = \sqrt{2} \sin z$. В интервала $z \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ тя е монотонно растяща и стойностите ѝ са $u \in (-1, 1)$. В интервала $z \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ функцията u е монотонно

растяща от 1 до $\sqrt{2}$, а в интервала $z \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ тя е монотонно намаляваща от $\sqrt{2}$ до 1. Това означава, че при $z \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ стойностите на функцията u от интервала $(1, \sqrt{2})$ се повтарят. Следователно всяко $u \in (1, \sqrt{2})$ има два първообраза за аргумента $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, които са решение на уравнението (1) (черт.3).

Да разгледаме функцията $h(x) = au^2 + 2u - a$, $u \in (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$. Ако запишем уравнение (1) във вида $\sin x - \cos x - a \sin x \cos x = 0$, то лявата страна на това уравнение е аналитичният вид на композицията на функциите $u(x)$ и $h(x)$, защото

$$h(u(x)) = a(\sin x - \cos x)^2 + 2(\sin x - \cos x) - a = 2(\sin x - \cos x - a \sin x \cos x)$$

Следователно при полагането $u(x) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ уравнението (1) се свежда до уравнението

$$(5) \quad au^2 + 2u - a = 0, \quad u \in (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}].$$

Дадената задача се преформула по следния начин:

Кои са възможните разположения на корените на уравнението (5) в интервала $u \in (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$, за да има уравнение (1) два различни корена в интервала $[0, \pi]$?

$$\text{Понеже } a = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi],$$

то при стойност на параметъра $a = 0$ уравнение (1) има само едно решение в интервала $[0, \pi]$, т.е. поставената задача няма решение.

Нека сега $a \neq 0$. В този случай уравнение (5) е квадратно и понеже дискриминантата му $D = 1 + a^2 > 0$, винаги има два различни корена u_1 и u_2 . За да се направи изследване на разположението на корените на уравнение (5), трябва да се

опишат аналитично всички възможни случаи. Разглеждането на различните подслучаи ще даде информация за броя на корените на уравнение (1) в интервала $[0, \pi]$ в зависимост от стойностите на параметъра a . Текстът на задачата ограничава разсъжденията само до случаите, в които решенията на уравнение (1) са точно две.

Ще направим пълно изследване на разположението на корените u_1 и u_2 на уравнение (5) в зависимост от стойностите на параметъра a . Разглеждаме уравненията

$$(6) \quad \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = u_i, \quad i = 1, 2.$$

1) Нека $u_1 \in (1, \sqrt{2})$ и $u_2 \in (1, \sqrt{2})$. Тогава всяко едно от уравненията (6) има по две решения в интервала $(0, \pi)$ (т.е. съществуват два първообраза x_{i1} и x_{i2} за всяко u_i). Следните условия са необходими и достатъчни, за да има уравнение (1) четири решения в дадения интервал:

$$\left| \begin{array}{l} ah(1) > 0 \\ ah(\sqrt{2}) > 0 \\ 1 < -\frac{1}{a} < \sqrt{2} \end{array} \right|$$

Понеже тази система няма решение, то не съществуват стойности на реалния параметър a , за които уравнение (1) има четири корена в интервала $[0, \pi]$ при това разположение на корените u_1 и u_2 на уравнение (5).

2) Нека $u_1 \in (-1, 1)$, а $u_2 \in (1, \sqrt{2})$. Тогава едното от уравненията (6) има едно решение в дадения интервал, а другото – две. Следните условия са необходими и достатъчни, за да има уравнение (1) три решения в дадения интервал:

$$\left| \begin{array}{l} ah(-1) > 0 \\ ah(\sqrt{2}) > 0 \\ ah(1) < 0 \end{array} \right|$$

Решенията на тази система са $a < -2\sqrt{2}$. За тези стойности на реалния параметър a уравнение (1) има три корена в интервала $[0, \pi]$ при това разположение на корените u_1 и u_2 на уравнение (5).

3) Нека $u_1 \in (-1, 1)$ и $u_2 \in (-1, 1)$. Тогава всяко от уравненията (6) има по едно решение в дадения интервал (съществува по един първообраз x_i за всяко u_i). Следните условия са необходими и достатъчни, за да има уравнение (1) две решения в дадения интервал:

$$\begin{cases} ah(-1) > 0 \\ ah(1) > 0 \\ -1 < -\frac{1}{a} < 1 \end{cases}.$$

Понеже тази система няма решение, то не съществуват стойности на реалния параметър a , за които уравнение (1) има два корена в интервала $[0, \pi]$ при това разположение на корените u_1 и u_2 на уравнение (5).

4) Нека $u_1 \in (-1, 1)$, а $u_2 = \sqrt{2}$. Всяко едно от уравненията (6) има по едно решение (съществува по един първообраз x_i за всяко u_i). Следните условия са необходими и достатъчни, за да има уравнение (1) две решения в дадения интервал:

$$\begin{cases} ah(-1) > 0 \\ h(\sqrt{2}) = 0 \\ ah(1) < 0 \end{cases}.$$

Решението на тази система е $a = -2\sqrt{2}$. При намерената стойност $-2\sqrt{2}$ на реалния параметър a уравнение (1) се представя във вида $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ и неговите решения са $x_1 = \frac{\pi}{12}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

5) Нека $u_1 \in (1, \sqrt{2})$, а $u_2 = \sqrt{2}$. Едното от уравненията (6) има едно решение, а другото – две. Следните условия са необходими и достатъчни, за да има уравнение (1) три решения в дадения интервал:

$$\begin{cases} h(\sqrt{2}) = 0 \\ ah(1) > 0 \end{cases}.$$

Понеже тази система няма решение, то не съществуват стойности на реалния параметър a , за които уравнение (1) има три корена в интервала $[0, \pi]$ при това разположение на корените u_1 и u_2 на уравнение (5).

6) Нека или $u_1 < -1$, или $u_1 > \sqrt{2}$, а $u_2 = \sqrt{2}$. Едното от уравненията (6) има един корен в интервала $[0, \pi]$, а другото няма корени. Следните условия са необходими и достатъчни, за да има уравнение (1) едно решение в дадения интервал:

$$\begin{cases} h(\sqrt{2}) = 0 \\ ah(1) < 0 \\ ah(-1) < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} h(\sqrt{2}) = 0 \\ -\frac{1}{a} > \sqrt{2} \end{cases}.$$

Съвкупността от тези две системи няма решение, понеже всяка една от тях е несъвместима, т.е. няма решение. Няма стойност на параметъра a , за която уравнение (1) има един корен в интервала $[0, \pi]$ при това разположение на корените u_1 и u_2 на уравнение (5).

7) Нека или $u_2 < -1$, или $u_2 > \sqrt{2}$, а $u_1 \in (-1, 1)$. Едното от уравненията (6) има един корен в интервала $[0, \pi]$, а другото няма корени. Следните условия са необходими и достатъчни, за да има уравнение (1) едно решение в дадения интервал:

$$\begin{cases} ah(\sqrt{2}) < 0 \\ ah(1) < 0 \\ ah(-1) > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} ah(-1) < 0 \\ ah(1) > 0 \end{cases}.$$

Решенията на тази съвкупност от системи са стойностите на параметъра a от множеството $(-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, +\infty)$. За всяка стойност на $a \in (-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, +\infty)$ уравнение (1) има един корен в интервала $[0, \pi]$ при това разположение на корените u_1 и u_2 на уравнение (5).

8) Нека или $u_2 < -1$, или $u_2 > \sqrt{2}$, а $u_1 \in (1, \sqrt{2})$. Едното от уравненията (6)

има два корена в интервала $[0, \pi]$, а другото няма корени. Следните условия са необходими и достатъчни, за да има уравнение (1) две решения в дадения интервал:

$$\begin{cases} ah(\sqrt{2}) > 0 \\ ah(1) < 0 \\ ah(-1) < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} ah(\sqrt{2}) < 0 \\ ah(1) > 0 \end{cases}.$$

Съвкупността от тези две системи няма решение, понеже всяка една от тях е несъвместима, т.е. няма решение. Следователно няма стойности на параметъра a , за които уравнение (1) има два корена в интервала $[0, \pi]$ при това разположение на корените u_1 и u_2 на уравнение (5).

От това изследване на разположението на корените на уравнение (5) в зависимост от параметъра a може да се направи следният **извод**.

- При $a \in (-\infty, -2\sqrt{2})$ уравнение (1) има **три** корена в интервала $[0, \pi]$;
- при $a = -2\sqrt{2}$ уравнение (1) има **два** корена в интервала $[0, \pi]$;
- при $a \in (-2\sqrt{2}, +\infty)$ уравнение (1) **един** корен в интервала $[0, \pi]$.

Вариант II за решение на задачата

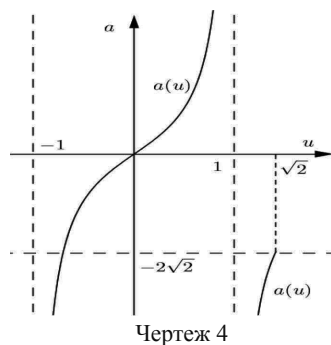
Видяхме, че при полагането $u(x) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ уравнение (1) се свежда до уравнение (5). Да разгледаме функцията

$$a(u) = \frac{-2u}{u^2 - 1}, \quad u \in (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}] \quad (\text{черт.4}).$$

$$\text{Понеже } a'(u) = 2 \frac{u^2 + 1}{(u^2 - 1)^2} > 0, \text{ то функцията } a(u)$$

е монотонно растяща за всяко $u \in (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$. Тъй

като $\lim_{u \rightarrow -1, u > -1} a(u) = -\infty$, $\lim_{u \rightarrow 1, u < 1} a(u) = +\infty$ и $\lim_{u \rightarrow 1, u > 1} a(u) = -\infty$, правите с уравнения $u = -1$ и $u = 1$ са вертикални асимптоти на клоновете от графика на функцията



Чертеж 4

$a(u)$. В симетричния спрямо началото на координатната система интервал $(-1, 1)$ функцията $a(u)$ е нечетна, т.е. за всяко $u \in (-1, 1)$ е в сила $a(-u) = -a(u)$. В този интервал графиката ѝ е симетрична спрямо началото на координатната система (черт.4). Тъй като функцията $a(u)$ е монотонно растяща, то максималната ѝ стойност в интервала $(1, \sqrt{2}]$ е $a(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$. Множествата от стойности на функцията $a(u)$ са: $a(u) \in (-\infty, +\infty)$ при $u \in (-1, 1)$ и $a(u) \in (-\infty, -2\sqrt{2})$ при $u \in (1, \sqrt{2}]$.

Да разгледаме функциите $a = c = \text{const}$ и $a(u) = \frac{-2u}{u^2 - 1}$, $u \in (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$.

При $c < -2\sqrt{2}$ правите с уравнения $a = c$, успоредни на абсцисната ос, пресичат клоновете от графиката на функцията $a(u)$ в две точки с координати (u_1, c) и (u_2, c) , като $u_1 \in (-1, 1)$, а $u_2 \in (1, \sqrt{2}]$. В интервала $(-1, 1)$ стойностите на функцията $u(x)$ не се повтарят и следователно $u_1(x)$ има точно един първообраз за аргумента x . В интервала $(1, \sqrt{2})$ стойностите на функцията $u(x)$ се повтарят. Следователно на абсцисата $u_2(x)$ отговарят два първообраза за аргумента x – един в множеството $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ и един в множеството $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. Това означава, че при $a < -2\sqrt{2}$ уравнение (1) има три решения в интервала $[0, \pi]$.

При $c > -2\sqrt{2}$ правите $a = c$, успоредни на абсцисната ос, пресичат клоната от графиката на функцията $a(u) = \frac{-2u}{u^2 - 1}$, $u \in (-1, 1)$ в една точка и не пресичат клоната от графиката ѝ при $u \in (1, \sqrt{2}]$. Следователно при $a > -2\sqrt{2}$ уравнение (1) има **един** корен в интервала $[0, \pi]$.

Тъй като стойността $u(x) = \sqrt{2}$ не се повтаря, то правата $a = -2\sqrt{2}$ пресича графиката на функцията $a(u)$ точно в две точки $(u_1, -2\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, като $u_1 \in (-1, 1)$, абсцисата на всяка от които има един първообраз за аргумента x . В този случай уравнение (1) има точно две решения в интервала $[0, \pi]$, а именно $x_1 = \frac{\pi}{12}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Вариант III за решение на задачата

Да означим с ε знака на израза $\sin x - \cos x$, като $\varepsilon = +1$ при $\sin x - \cos x > 0$, $\varepsilon = -1$ при $\sin x - \cos x < 0$ и $\varepsilon = 0$ при $\sin x - \cos x = 0$.

От уравнение (1) заключаваме, че при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$$a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon = 0.$$

Следователно при $a = 0$ уравнение (1) има само едно решение $x = \frac{\pi}{4}$ в интервала $[0, \pi]$.

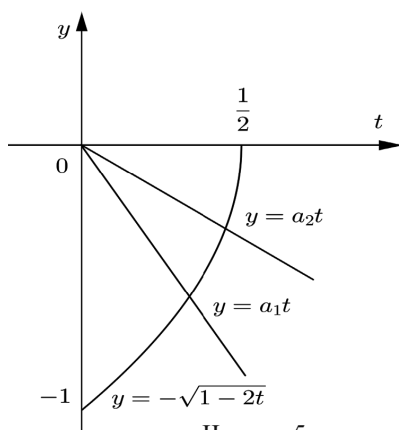
Нека $a \neq 0$, т.е. $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Разглеждаме функцията $t(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. Множеството от стойностите ѝ при $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ е $t(x) \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$. За израза $\sin x - \cos x$ получаваме $\sin x - \cos x = \varepsilon \sqrt{1-2t}$ и уравнение (1) е еквивалентно на уравнението

$$(7) \quad at = \varepsilon \sqrt{1-2t}, \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

(i) Нека $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. В този интервал

$\varepsilon = -1$, $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $a < 0$. Функцията $y = at$,

чиято графика е права линия, е намаляваща, а функцията $y = -\sqrt{1-2t}$ е растяща в дадения интервал. За всяка стойност на параметъра a съответните графики имат една пресечна точка, а уравнение (7) има точно едно решение (черт.5).



Черт. 5

Извод

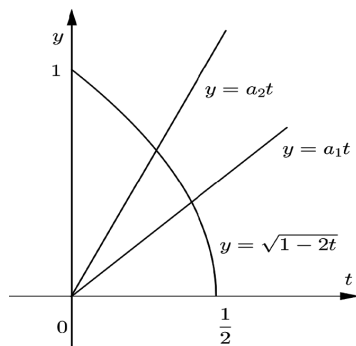
За всяко $a < 0$ уравнение (1) има точно едно решение в интервала $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

(ii) Нека $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. В този интервал

$\varepsilon = +1$, $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $a > 0$. Функцията $y = at$,

чиято графика е права линия, е растяща, а функция-та $y = -\sqrt{1-2t}$ е намаляваща в дадения интервал.

За всяка стойност на параметъра a съответните графики имат една пресечна точка, а уравнение (7) има точно едно решение (черт.6).



Черт. 6

Извод

За всяко $a > 0$ уравнение (1) има точно едно решение в интервала $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(iii) Нека $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. В този интервал $\varepsilon = +1$, $t \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ и $a < 0$. Функ-

циите $y = at$ и $y = \sqrt{1-2t}$ са монотонни в дадения интервал. От полагането

$t = \frac{1}{2} \sin 2x$ се вижда, че на всяко $t \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ отговарят две стойности на аргу-

мента $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Само при $t = -\frac{1}{2}$ има една съответна стойност на x .

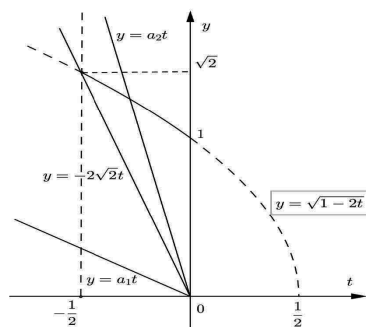
Да изследваме по-подробно поведението на двете функции в интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(a) Когато $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, променливата t приема всички стойности от 0 до $-\frac{1}{2}$,

т.е. намалява. Като съгласуваме посоката на движение на точките от графиките на двете функции с тази на аргумента t , се вижда, че стойностите на функцията

$y = at$ нарастват от 0 до $-\frac{a}{2}$, а стойностите на функцията $y = \sqrt{1-2t}$ от 1 до $\sqrt{2}$.

(b) Когато $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right)$, променливата t приема всички стойности от $-\frac{1}{2}$ до 0, т.е. расте. Съответните на t стойности на функцията $y = at$ намаляват от $-\frac{a}{2}$ до 0, а тези на функцията $y = \sqrt{1-2t}$ от $\sqrt{2}$ до 1. Следователно при $t = -\frac{1}{2}$ максимумът на функцията $y = at$ е $-\frac{a}{2}$, а на функцията $y = \sqrt{1-2t}$ е $\sqrt{2}$.



Чертeж 7

Извод

Графиките на двете функции имат (черт.7):

- две общи точки точно когато $-\frac{a}{2} > \sqrt{2}$, т.е. $a < -2\sqrt{2}$;
- една обща точка при $a = -2\sqrt{2}$;
- нямат общи точки при $-\frac{a}{2} < \sqrt{2}$, т.е. $a > -2\sqrt{2}$.

За да имат двете функции в интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ само една обща точка, те трябва да имат общ максимум. Той се достига за стойност на параметър $a = -2\sqrt{2}$.

Заклучение

- $x = \frac{\pi}{4}$, $a = 0$
- $x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$, $a < 0$

За всяко $a < 0$ уравнение (1) има точно едно решение. При $a = -2\sqrt{2}$ уравнение (1) има решение $x = \frac{\pi}{12}$.

- $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$, $a > 0$

За всяко $a > 0$ уравнение (1) има точно едно решение.

- $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), a < 0$

За всяко $a < -2\sqrt{2}$ уравнение (1) има две различни решения.

При $a = -2\sqrt{2}$ уравнение (1) има точно едно решение $x = \frac{3\pi}{4}$.

За всяко $a > -2\sqrt{2}$ уравнение (1) няма решение.

Вариант IV за решение на задачата

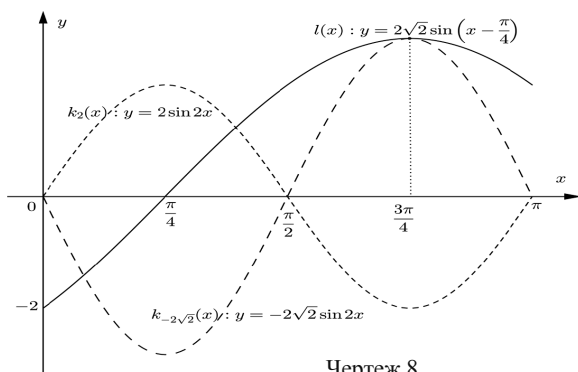
Уравнение (1) е еквивалентно на уравнението

$$(8) \quad a \sin 2x = 2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Ако $a = 0$, то $x = \frac{\pi}{4}$ и обратно. Уравнение (8) има само едно решение.

Нека $a \neq 0$, т.е. $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Въвеждаме помощните функ-

ции $k_a(x) = a \sin 2x$, $l(x) = 2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (черт.8).



Черт. 8

От уравнение (8) получаваме уравнение

$$(9) \quad k_a(x) = l(x), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Разглеждаме следните два случая за параметъра $a \neq 0$.

(i) Нека $a > 0$.

Ако $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то функцията $k_a(x)$ има положителни стойности за всяка стойност на аргумента. В подинтервала $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ функцията $l(x)$ приема отрицателни стойности. Уравнение (9) няма решение. В подинтервала $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ функцията $l(x)$ приема положителни стойности и е монотонно растяща, докато функцията $k_a(x)$ е монотонно намаляваща. Уравнение (9) има точно едно решение. Ако $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, то функцията $k_a(x)$ приема отрицателни стойности, а функцията $l(x)$ приема положителни стойности и уравнение (9) няма решение.

Извод

При $a > 0$ уравнение (8) има точно едно решение в интервала $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) Нека $a < 0$.

Ако $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то функцията $k_a(x)$ приема отрицателни стойности за всяка стойност на аргумента. В подинтервала $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ функцията $l(x)$ приема отрицателни стойности и е монотонно растяща, докато функцията $k_a(x)$ е монотонно намаляваща. Уравнение (9) има точно едно решение. В подинтервала $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ функцията $l(x)$ приема положителни стойности. Уравнение (9) няма решение. В интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ функциите $k_a(x)$ и $l(x)$ приемат положителни стойности. В подинтервала $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ и двете функции са монотонно растящи, а в подинтервала $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ са монотонно намаляващи. При $x = \frac{3\pi}{4}$ функциите имат екстремуми, които

са максимуми. Освен това и за двете функции правата $x = \frac{3\pi}{4}$ е ос на симетрия, защото $k_a \left(\frac{3\pi}{4} - x \right) = k_a \left(\frac{3\pi}{4} + x \right)$, $l \left(\frac{3\pi}{4} - x \right) = l \left(\frac{3\pi}{4} + x \right)$. Уравнение (9) може да има две, едно или да няма решение. Уравнение (9) има едно решение точно когато екстремумите на двете функции съвпадат, т.е. когато $x = \frac{3\pi}{4}$ и $a = -2\sqrt{2}$.

Извод

В случая $a < 0$ уравнение (8) има точно две решения при $a = -2\sqrt{2}$ и те са $x = \frac{\pi}{12} \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$ и $x = \frac{3\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$.

Необходими знания и умения

За да се разберат и осмислят предложените решения, необходими са следните знания и умения:

- монотонност и непрекъснатост на функция в дефиниционните ѝ интервали
- намиране на лява и дясна граница на функция в дадена точка
- вертикални асимптоти за графиката на функция
- производна и глобални екстремуми на функция в даден интервал
- построяване и четене на графика на функция в дефиниционното ѝ множество
- посока на движение по графиката на функция в зависимост от посоката на движение на аргумента ѝ
- определяне на множеството от стойностите на функция
- намиране броя на общите точки на графиките на две функции в общото им дефиниционно множество
- изследване на поведението на тригонометрична функция и определяне на знака на тригонометричен израз в даден интервал
- определяне броя на решенията на уравнение в даден интервал
- решаване на тригонометрични уравнения при фиксирана стойност на параметъра
- познато полагане при решаване на тригонометрични уравнения
- графично решаване на параметрични уравнения
- определяне на симетрии за клоновете от графиката на функция (точка на симетрия, ос на симетрия)
- установяване на зависимости между функционални стойности

- теорема за разположение на корените на квадратен тричлен спрямо две или три числа
- дефиниция на понятието “сложна функция”
- стойност на функция и първообрази на дадена стойност на функция
- изследване на дробно-рационални функции
- решаване на неравенства.

✉ **Юлия Нинова**

доцент, доктор
ФМИ, Софийски университет
E-mail: julianinova@hotmail.com

✉ **Веселка Михова**

доцент, доктор
ФМИ, Софийски университет
E-mail: mihova@fmi.uni-sofia.bg

ONE PROBLEM – SEVERAL “ELEMENTARY” SOLUTIONS

Abstract. The paper considers a mathematical problem from the entrance exam in the Sofia University “St. Kliment Ohridski”, held on July 11, 2011. It analyzes and comments the published exemplary solution (<http://www.fmi.uni-sofia.bg/priem/ksi2011-2tema2-reshenia.pdf>) and proposes four “elementary” solutions, based on familiar and exercised knowledge in Mathematics as a profiling subject.

✉ **Julia Ninova**

Associated professor, PhD
FMI, Sofia University
E-mail: julianinova@hotmail.com

✉ **Vesselka Mihova**

Associated professor, PhD
FMI, Sofia University
E-mail: mihova@fmi.uni-sofia.bg