

*Our Teachers  
Наши учители*

## ЕДИН КЛАСИЧЕСКИ УЧЕБНИК ПО АЛГЕБРА

**Донка Пашкулева**

*Българска академия на науките*

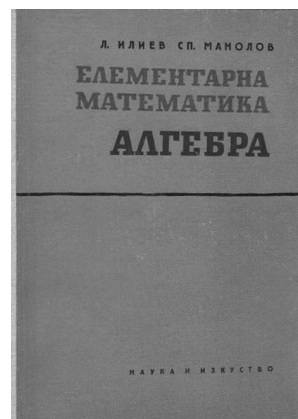
**Резюме.** Статията представя учебник по алгебра на изтъкнатите български математици академик Любомир Илиев и професор Спас Манолов, който не е загубил актуалност и днес.

*Keywords:* algebra, textbook, polynomial, function, arithmetic progression

Преди малко повече от 60 години, през септември 1953 г., се появява първото издание на „Елементарна математика. Алгебра“ с автори изтъкнатите български математици акад. Любомир Илиев и проф. Спас Манолов. Второто издание е от 1956 г. отново на издателство „Наука и изкуство“. Този учебник е втора книга от поредицата помагала по елементарна математика, в която влизат още „Аритметика“, „Планиметрия“, „Стереометрия“ и „Тригонометрия“. Те се придружават и от „Сборник от задачи по елементарна математика“, който е издаден през 1956 г. Двамата автори са известни не само със забележителните си научни резултати, но и с дейностите си в областта на математическото образование.

Тяхното умение да поднасят по неповторим начин важни факти от математиката е характерно за цялото им творчество, включително и за разглеждания учебник. По думите на проф. Иван Тонов – дългогодишен ръководител на катедрата по Методика на обучението по математика към Факултета по математика и информатика на СУ „Св. Кл. Охридски“, учебникът „Елементарна математика. Алгебра“ не е загубил своята актуалност и се ползва с успех от сегашните студенти и преподаватели.

В разглежданата книга са изложени систематично основните въпроси от елементарната алгебра: алгебрични изрази; уравнения и неравенства; системи уравнения; комбинаторика; прогресии; решаване на линейни уравнения в цели числа. Не се съдържат глави за показателна и логаритмична функция. Те са изложени в книгата „Аритметика“ от поредицата след въвеждане на ирационалните числа. При написването на книгата „Елементарна математика. Алгебра“ са използвани учебниците



на Новоселов „Специален курс по елементарна алгебра“, издаден през 1951 г., и „Алгебра на елементарните функции“, издаден през 1952 г. Наред с въвеждането на алгебричните понятия, включително „пръстен“ и „поле“, се развива и понятието „функция“. Още от едночлените започва разглеждането на изразите като функции.

Учебникът се състои от въведение и 4 глави. Въведението е посветено на множествата. Разгледани са основните числови множества: естествени числа; цели числа; рационални числа; реални числа. В множеството на реалните числа са дефинирани понятията „равно“, „по-голямо“, „по-малко“, които са понятия-релации. Обърнато е внимание на свойствата „разположеност на числови полета“ и „плътност в полето на рационалните и реалните числа“. Разгледано е и съответствието между числови и точкови множества.

**Част Първа – „Алгебрични изрази“**, се състои от 3 глави. Глава Първа „Многочлени“ включва аналитични изрази, тъждествени преобразувания, графики на многочлени, теорема за тъждественост на многочлени, действия с многочлени. В целия учебник са следвани известни дотогава методики. В предговора авторите отбелязват, че съзнателно не е развита теорията върху полето на комплексните числа, както е при Новоселов, защото са се стремили да не се усложнява материалът. Теоремите за тъждественост на многочлени, действията с многочлени, формулите за съкратено умножение, някои основни тъждества и разлагането на многочлени на множители са изложени стегнато и коректно. Например в § 16 се систематизират различни начини за разлагане на един многочлен на множители. На практика разлагането се извършва чрез различни комбинации на тези начини. Ето кои основни начини за разлагане се предлагат: изнасяне на общ множител пред скоби; групиране на няколко члена или представянето на някои от членовете като суми; отделяне на точен квадрат; метод на неопределените коефициенти. При доказване на теоремите за тъждественост е използван методът на математическата индукция.

Глава Втора е посветена на дробни рационални изрази. Тук се включват видове рационални изрази и действия с тях. В глава Трета – „Ирационални изрази“, освен преобразуване на изрази, съдържащи радикали, е предложено и изследване на ирационални функции.

**Част Втора – „Уравнения и неравенства“**, започва с Глава Четвърта, която е посветена на уравненията. Разглеждат се алгебрични, дробни и ирационални уравнения. Търсят се решения в полето на реалните числа. Изследва се въпросът за еквивалентност на две уравнения. Отделено е място и на системи уравнения. При решаването на неравенства са дадени много примери, в които задачите са решени по чисто аритметичен начин. Особено внимание е обърнато на еквивалентността на неравенствата.

В глава Пета – „Уравнения и неравенства от първа степен“, при изследването на решенията на параметрични уравнения от първа степен е дадена и геометрична интерпретация. Застъпен е и въпросът за решаване на линейни уравнения в областта на целите числа. Разгледани са някои частни случаи за решаване на линейни системи уравнения. Посочен е също така и метод за решаване на системи уравнения въз основа на понятието „еквивалентност“.

Глава Шеста е озаглавена „Уравнения и неравенства от по-висока степен“. Наред с квадратните уравнения се разглеждат и уравнения, свеждащи се към квадратни. Решени са и ирационални неравенства. В & 40 са включени няколко забележителни неравенства.

**Част Трета** – „Комбинаторика“, включва както съединения без повторения, така и съединения с повторения. **Част Четвърта** – „Прогресии“, е посветена на аритметичната, геометричната и безкрайно намаляващата геометрична прогресия. Интерес представляват аритметични прогресии от произволен ред, върху които ще се спрем по-подробно.

### **I. Аритметични прогресии от произволен ред**

Нека  $f(x) = ax + b$ .

Тъй като  $f(0) = b$   $f(1) = a + b$   $f(2) = 2a + b \dots$ ,

то тази редица е аритметична прогресия с разлика  $a$ , т.е.  $f(0), f(1), f(2), \dots$

Като правят това наблюдение, авторите дават следната дефиниция:

**Дефиниция 1.** Ако  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ , редицата  $f(0), f(1), \dots, f(n-1)$  се нарича аритметична прогресия.

Нека  $f_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_{k-1}x$ ,  $a_0 \neq 0$  е произволен полином от степен  $k$ .

**Дефиниция 2.** Редицата от числа  $f_k(0), f_k(1), \dots, f_k(n-1)$  се нарича  $n$ -членна аритметична прогресия от ред  $k$ .

Нека  $a_1, a_2, \dots, a_n$  е произволна крайна редица от числа. Образоваме:

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1$$

$$\Delta a_2 = a_3 - a_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta a_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$

Числата от редицата  $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_{n-1}$  се наричат първи разлики на редицата  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Аналогично числата от вида  $\Delta^2 a_m = \Delta(\Delta a_m) = \Delta a_{m+1} - \Delta a_m$  се наричат разлики от втори ред или втори разлики на редицата  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . По-общо, разлика от  $k$ -ти ред или  $k$ -та разлика е  $\Delta^k a_m = \Delta^{k-1} a_{m+1} - \Delta^{k-1} a_m$ .

**Теорема 1.** Редицата от първите разлики на една аритметична прогресия от  $k$ -ти ред е аритметична прогресия от  $(k-1)$  ред.

**Следствие 1.** *К-тите разлики на една аритметична прогресия от k-ти ред са постоянни.*

**Следствие 2.** *Разликите от (k-1) ред на една аритметична прогресия от k-ти ред представят аритметична прогресия.*

**Следствие 3.**

$$(*) \quad \Delta a_1 + \Delta a_2 + \dots + \Delta a_n = a_{n+1} - a_1$$

**Приложения**

**Пример 1.** Ако  $f_k(x) = (x+1)^{k+1}$ , образуваме аритметичната прогресия от  $(k+1)$ -ви ред с  $(n+1)$  члена

$$1^{k+1}, 2^{k+1}, \dots, (n+1)^{k+1}.$$

Съгласно (\*) имаме

$$\sum_{m=1}^n \Delta m^{k+1} = (n+1)^{k+1} - 1.$$

Оттук лесно може да се получи връзка между степенните сборове  $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$  ( $k = 0, \dots, n$ ), умножени със съответни биномни коефициенти (Гроздев et al., 2008).

**Пример 2.** Нека  $\varphi(x)$  и  $f(x)$  са две функции, така че  $f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x)$  за фиксирано  $h$  и всяко  $x$ . Разглеждаме редицата  $\varphi(x), \varphi(x+h), \dots, \varphi(x+nh)$ . Редицата от първите ѝ разлики е  $f(x), f(x+h), \dots, f(x+\overline{n-1}h)$ .

От (\*) следва, че

$$f(x) + f(x+h) + \dots + f(x+\overline{n-1}h) = \varphi(x+nh) - \varphi(x).$$

Сега лесно можем да пресметнем сумата  $A = \sin x + \sin(x+h) + \dots + \sin(x+\overline{n-1}h)$  (Гроздев & Лесов, 2012). Ако положим  $\varphi(x) = \cos\left(x - \frac{h}{2}\right)$ ,  $f(x) = -2\sin x \sin \frac{h}{2}$ , не-посредствено се стига до формулата

$$A = \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin\left(x + \overline{n-1} \frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}, \quad h \neq 2k\pi, \quad k - \text{цяло}.$$

## БЛАГОДАРНОСТИ

Бих искала да изкажа своята голяма благодарност на проф. Сава Гроздев за оказаната помощ при написването на тази статия.

### ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С., Ц. Байчева, П. Пиперков, К. Кирилова-Лупанова (2008). *Зрелостен изпит. Примерни теми с решения. Математика*. В. Търново: Абагар (ISBN 978-954-427-782-6), 108 страници.
- Гроздев, С., Лесов, Х. (2012). *Зимни математически състезания*. София: ВУЗФ (ISBN 978-954-8590-17-4), 351 страници.

## A CLASSICAL TEXTBOOK IN ALGEBRA

**Abstract.** The paper presents a textbook in Algebra by the outstanding Bulgarian mathematicians Academician Ljubomir Iliev and Professor Spas Manolov, which still is on modern lines.

✉ **Dr. Donka Pashkuleva, Assoc. Prof.**  
Institute of Mathematics and Informatics – BAS  
Acad. G. Bonchev Str., bl. 8  
1113 Sofia, Bulgaria  
E-mail: donka\_zh\_vasileva@abv.bg