

ДВЕ ДВОЙКИ ТОЧКИ, ПОРОДЕНИ ОТ АСОЦИИРАНИ СПРЯМО ТРИЪГЪЛНИК ЦЕНТРАЛНИ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ

Сава Гроздев, Веселин Ненков

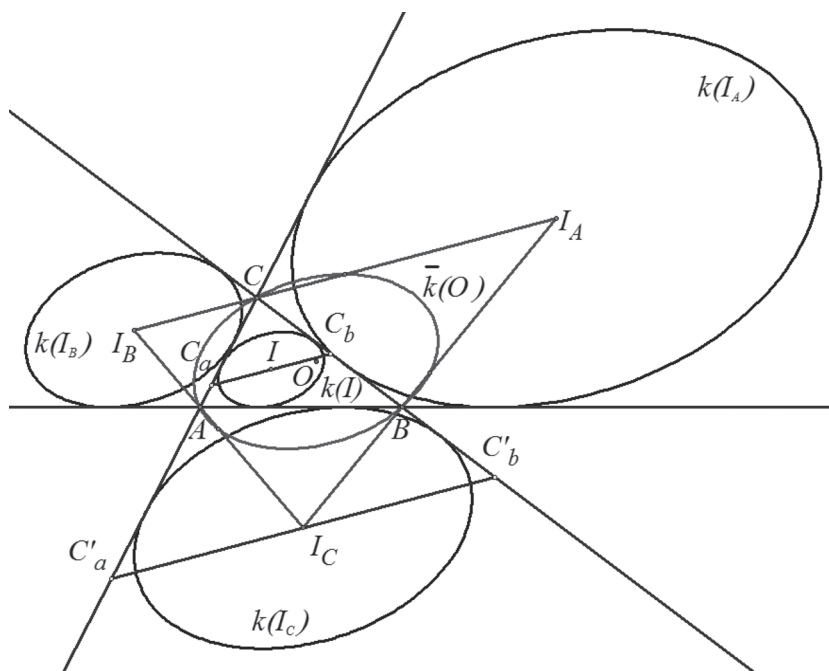
Резюме. В статията е използвана софтуерната програма “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP) за откриване на различни интересни свойства на конични сечения, асоциирани с даден $\triangle ABC$. Предложени са и строги доказателства на откритите свойства. Например, да разгледаме точка I в равнината на $\triangle ABC$ и спрегнатия ѝ $\triangle I_A I_B I_C$ относно $\triangle ABC$. Точките I, I_A, I_B и I_C са центровете на вписани в $\triangle ABC$ конични сечения, съответно $k(I), k(I_A), k(I_B)$ и $k(I_C)$, като средите на отсечките $I_A, I_B, I_C, I_B I_C, I_C I_A$, и $I_A I_B$, лежат на описано около $\triangle ABC$ конично сечение $\bar{k}(O)$. Нека правата I , която е успоредна на $I_A I_B$, пресича CA и CB съответно в точките C_a и C_b , а правата I_C , която е успоредна на $I_A I_B$, пресича CA и CB съответно в точките C'_a и C'_b . Определяме точките $L_c(I) = AC_a \cap BC_b$ и $L_c'(I_C) = AC'_a \cap BC'_b$. Аналогично се дефинират точките $L_a(I), L_b(I), L_a'(I_A)$ и $L_b'(I_B)$. Тогава, правите $AL_a(I), BL_b(I)$ и $CL_c(I)$ се пресичат в точка $T(I)$. В статията се разглеждат и други интересни конфигурации и свойства.

Keywords: THE GEOMETER’S SKETCHPAD (GSP), conjugate triangle, conic, inscribed conic, circumscribed conic, tangent point

Въведение. Една интересна задача, която се поставя в равнината на даден $\triangle ABC$, е свързана с построяването на окръжност k , допираща се до две от правите BC, CA, AB и до описаната за $\triangle ABC$ окръжност. В (Ненков, 1991) е изяснено, че радиусът на k зависи от радиуса на някоя от вписаните за $\triangle ABC$ окръжности, а в (Grozdev & Nenkov, 2010) е показано как могат да се определят допирните точки на окръжностите k със съответните двойки от правите BC, CA и AB . Оттук лесно се открива начин за построяване на центъра на k . В (Grozdev & Nenkov, 2010) са определени и две специални за $\triangle ABC$ точки T и T' , които се получават от двойките допирни точки на окръжностите k със съответните двойки прави. По този

начин описаната и вписаните за ΔABC окръжности пораждат две забележителни за ΔABC точки.

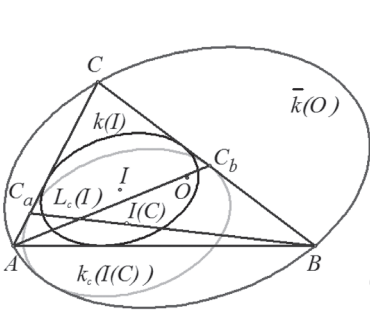
Любопитно е да се открият и двойки точки, които се пораждат от други конфигурации от описано и вписани за ΔABC централни конични сечения. Може да се очаква, че определените в (Ненков, 2010) Фойербахови конфигурации са подходящи за получаване на такива двойки точки. Необходимите изследвания при търсене и откриване на тези двойки точки се извършват с помощта на “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP). Във връзка с доказателствата на получените твърдения ще използваме барицентрични координати спрямо координатен ΔABC , като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ ((Гушев & Гушев, 2011) и (Паскалев & Чобанов, 1985)). Освен това с $A_0\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B_0\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $C_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ означаваме средите съответно на страните BC , CA и AB .



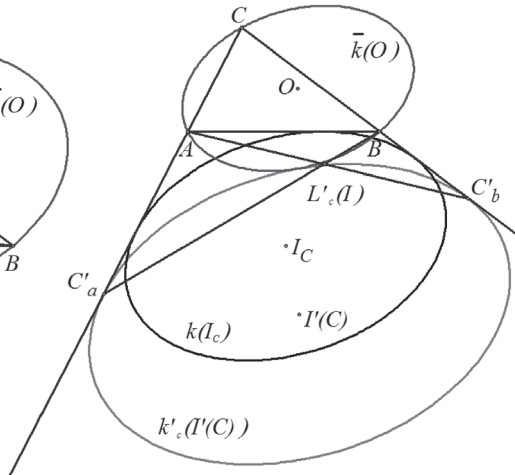
Фигура 1

Двойки забележителни точки, породени от асоциирани криви и някои техни свойства. Произволна точка $I(x_1, y_1, z_1)$ ($x_1 + y_1 + z_1 = 1$), която не лежи върху никоя от правите BC , CA , AB , B_0C_0 , C_0A_0 и A_0B_0 , е център на вписано за ΔABC ко-

нично сечение $k(I)$ (Фиг. 1) (Ненков, 2008). Точките $I_A \left(-\frac{x_I}{1-2x_I}, \frac{y_I}{1-2x_I}, \frac{z_I}{1-2x_I} \right)$, $I_B \left(\frac{x_I}{1-2y_I}, -\frac{y_I}{1-2y_I}, \frac{z_I}{1-2y_I} \right)$, $I_C \left(\frac{x_I}{1-2z_I}, \frac{y_I}{1-2z_I}, -\frac{z_I}{1-2z_I} \right)$ определят $\Delta I_A I_B I_C$, който се нарича спрегнат на I спрямо ΔABC (Паскалев & Чобанов, 1985) (с. 67). Точките I_A , I_B и I_C са центрове на криви $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$, вписани в ΔABC (Фиг. 1) [4]. Средите на отсечките на $I_A I_B$, $I_B I_C$, $I_C I_A$ и $I_A I_B$, както е показано в (Ненков, 2008), лежат на конично сечение $\bar{k}(O)$ с център точка O (Фиг. 1). Всяка от точките I , I_A , I_B , I_C и O определя еднозначно останалите (Ненков, 2010), затова двойките криви $\bar{k}(O)$ и $k(I)$, $\bar{k}(O)$ и $k(I_A)$, $\bar{k}(O)$ и $k(I_B)$, $\bar{k}(O)$ и $k(I_C)$ ще наричаме *асоциирани* спрямо ΔABC . В (Ненков, 2008) и (Ненков, 2010) е показано, че така построените криви притежават свойства, които са подобни на съответните свойства на вписаните и описаната окръжности за ΔABC . Затова можем да очакваме, че кривите $\bar{k}(O)$, $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ пораждат двойки точки, подобни на получените в (Grozdev & Nenkov, 2010).



Фиг. 2



Фигура 3

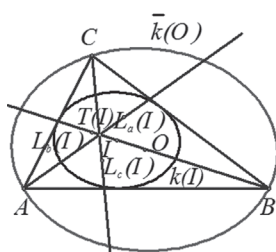
Следвайки аналогията с описания в (Grozdev & Nenkov, 2010) случай, търсенето на желаните точки трябва да започне с намирането на крива $k_c(I(C))$, която се допира до правите BC и CA съответно в точки C_b и C_a , а също така се допира до $\bar{k}(O)$ (Фиг. 2). В случай на окръжност (Grozdev & Nenkov, 2010) точките C_b и C_a лежат на права през I , перпендикулярна на CI , което означава, че правата $C_a C_b$ е успоредна на другата ъглополовяща $I_A I_B$, минаваща през върха C . В общия случай

трябва да очакваме, че правата $C_a C_b$ е успоредна на правата $I_A I_B$, която е хармонично спрегната на CI спрямо BC и CA . Затова нека с помощта на GSP да построим пресечните точки C_b и C_a на правата през I , успоредна на $I_A I_B$, съответно с BC и CA (Фиг. 1). След това да построим прави през C_b и C_a , успоредни на правите, минаващи през I и допирните точки на $k(I)$, съответно с BC и CA . Забелязваме, че тези прави се пресичат в точка $I(C)$ върху CI . Затова може да се очаква, че кривата $k_c(I(C))$ с център $I(C)$ и допираща се до CA и CB съответно в точките C_a и C_b ще се допира до $\bar{k}(O)$. Експериментите с GSP потвърждават очакванията и затова $k_c(I(C))$ е търсената крива, а точките C_a и C_b са необходимите елементи за откриване на точки, които са обобщения на забележителните точки, разгледани в (Grozdev & Nenkov, 2010).

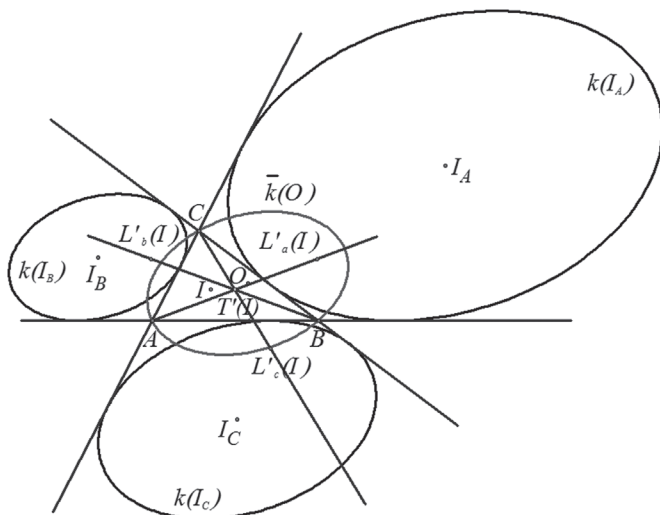
По аналогичен начин определяме и кривата $k_c'(I'(C))$ с център $I'(C)$ по допирните ѝ точки C_a' и C_b' и съответно с CA и CB , които се получават от пресичането с CA и CB на правата през I_C , успоредна на $I_A I_B$ (Фиг. 1, 2). По-нататък определяме точките $L_c(I) = AC_a \cap BC_b$ и $L_c'(I_C) = AC_a' \cap BC_b'$ (Фиг. 1, 2). Аналогично определяме точките $L_a(I)$, $L_b(I)$, $L_a'(I_A)$ и $L_b'(I_B)$. Наблюденията с GSP върху връзките на тези точки с върховете на $\triangle ABC$ ни дават основание да формулираме следните две свойства:

Свойство 1. Правите $AL_a(I)$, $BL_b(I)$, и $CL_c(I)$, минават през една точка $T(I)$ (Фиг. 4).

Свойство 2. Правите $AL_a'(I)$, $BL_b'(I)$, и $CL_c'(I)$, минават през една точка $T'(I)$ (Фиг. 5).



Фиг. 4

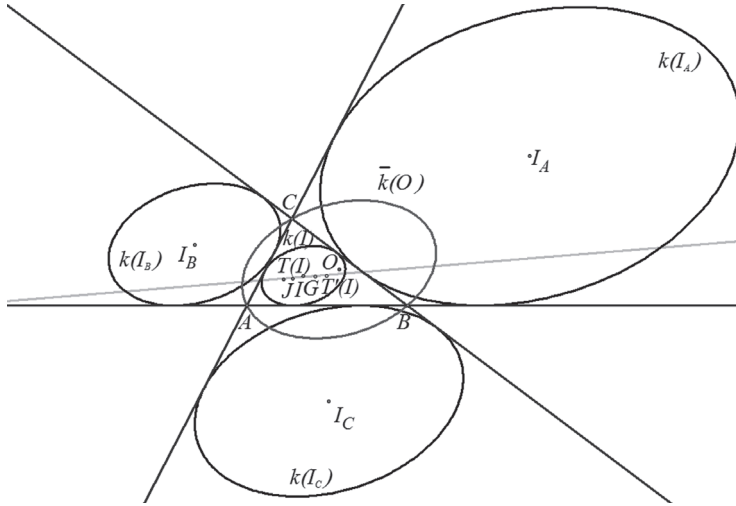


Фигура 5

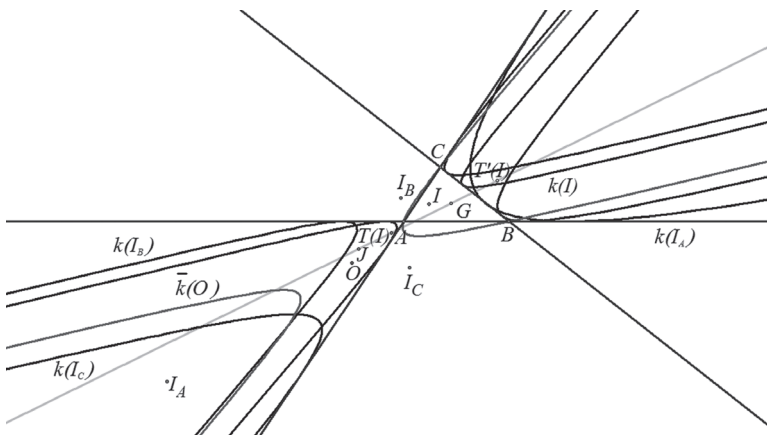
По отношение на разположението на точките $T(I)$ и $T'(I)$ в равнината на ΔABC забелязваме, че са изпълнени:

Свойство 3. Ако $\bar{k}(O)$ е елипса, точките $T(I)$ и $T'(I)$ са вътрешни за ΔABC (Фиг. 6).

Свойство 4. Ако $\bar{k}(O)$ е хипербола, точките $T(I)$ и $T'(I)$ са едновременно външни или едновременно вътрешни за ΔABC (Фиг. 7).



Фигура 6



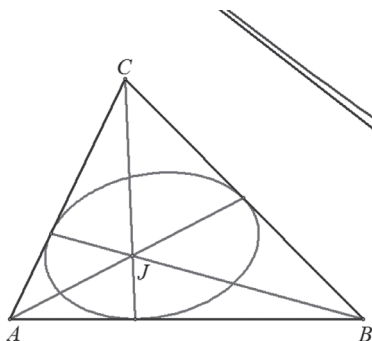
Фигура 7

При търсене на връзка между точките $T(I)$ и $T'(I)$ и други точки от равнината на ΔABC забелязваме следното:

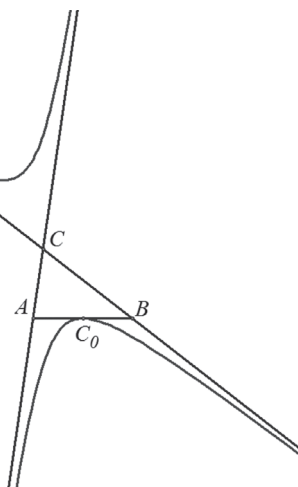
Свойство 5. Медицентърът G на ΔABC лежи на правата $T(I)T'(I)$ (Фиг. 6, 7).

Правите, минаващи през върховете на ΔABC и допирните точки на $k(I)$ със срещуположните им страни, се пресичат в една точка, която наричаме точка на Жергон за ΔABC спрямо $k(I)$ (Фиг. 8) (Ненков, 2010). За тази точка е изпълнено:

Свойство 6. Точката на Жергон за ΔABC спрямо $k(I)$ лежи на правата $T(I)T'(I)$ (Фиг. 6, 7).



Фигура 8



Фигура 9

Доказателство на свойства 1 и 2. Нека l_c е правата през I , успоредна на $I_A I_B$. От координатите на точките I, I_A и I_B получаваме, че l_c се описва с параметричните уравнения:

$$(1) \quad l_c : x = x_1 + x_1 t, y = y_1 - y_1 t, z = z_1 + (y_1 - x_1) t.$$

Като комбинираме (1) с всяко от уравненията $BC : x = 0$ и $CA : y = 0$, получаваме координатите съответно на C_b и C_a във вида

$$(2) \quad C_b (0, 2y_1, 1 - 2y_1), C_a (2x_1, 0, 1 - 2x_1).$$

От (2) за правите AC_b и BC_a намираме съответно уравненията

$$(3) \quad AC_b : x = 1 - t_1, y = 2y_1 t_1, z = z_1 + (1 - 2y_1) t_1,$$

$$(4) \quad BC_a : x = 2x_1 t_2, y = 1 - t_2, z = (1 - 2x_1) t_2.$$

От (3) и (4) намираме координатите на $L_c(I) = AC_a \cap BC_b$ във вида

$$(5) \quad L_c(I) \left(\frac{2x_I(1-2y_I)}{1-4x_I y_I}, \frac{2y_I(1-2x_I)}{1-4x_I y_I}, \frac{(1-2x_I)(1-2y_I)}{1-4x_I y_I} \right)$$

Аналогично намираме, че координатите на точките $L_a(I)$ и $L_b(I)$ са:

$$(6) \quad \begin{aligned} L_a(I) & \left(\frac{(1-2y_I)(1-2z_I)}{1-4y_I z_I}, \frac{2y_I(1-2z_I)}{1-4y_I z_I}, \frac{2z_I(1-2y_I)}{1-4y_I z_I} \right), \\ L_b(I) & \left(\frac{2x_I(1-2z_I)}{1-4z_I x_I}, \frac{(1-2z_I)(1-2x_I)}{1-4z_I x_I}, \frac{2z_I(1-2x_I)}{1-4z_I x_I} \right). \end{aligned}$$

От координатите (5) и (6) намираме уравненията на правите $AL_a(I)$, $BL_b(I)$ и $CL_c(I)$ във вида

$$(7) \quad AL_a(I): x = 1 - (y_I + z_I - 4y_I z_I)t_3, \quad y = y_I(1 - 2z_I)t_3, \quad z = z_I(1 - 2y_I)t_3,$$

$$(8) \quad BL_b(I): x = x_I(1 - 2z_I)t_4, \quad y = 1 - (z_I + x_I - 4z_I x_I)t_4, \quad z = z_I(1 - 2x_I)t_4,$$

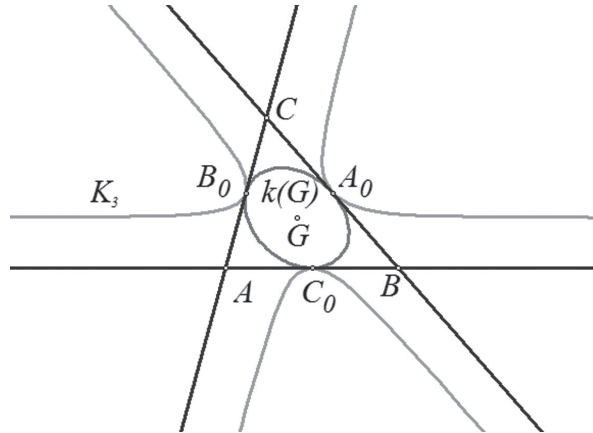
$$(9) \quad CL_c(I): x = x_I(1 - 2y_I)t_5, \quad y = y_I(1 - 2x_I)t_5, \quad z = 1 - (x_I + y_I - 4x_I y_I)t_5.$$

От (7) и (8) получаваме координатите на точката $T(I) = AL_a(I) \cap BL_b(I)$:

$$(10) \quad T(I) \left(\frac{x_I(1-2y_I)(1-2z_I)}{\tau}, \frac{y_I(1-2z_I)(1-2x_I)}{\tau}, \frac{z_I(1-2x_I)(1-2y_I)}{\tau} \right),$$

където $\tau = 1 - 4x_I y_I - 4y_I z_I - 4z_I x_I + 12x_I y_I z_I = 4x_I y_I z_I - (1 - 2x_I)(1 - 2y_I)(1 - 2z_I)$.

От симетричния вид на координатите на точката $T(I)$ е ясно, че тя лежи и върху правата $CL_c(I)$. Възщност това лесно се проверява със заместване на (10) в (9). С това свойство 1 е доказано.



Фиг. 10

Необходими са някои уточнения в свойство 1, породени от резултатите, водещи до неговото доказателство. Първо, точката $L_c(I)$ съществува във вида, определен с (5) само когато точката I не лежи върху хиперболата $\chi_c : 1 - 4xy = 0$ (Фиг. 9) (тя се допира до AB в точката C_0 и има за асимптоти правите CA и CB). Ако в числителите на (5) използваме равенството $1 - 4xy_1 = 0$, получаваме безкрайната точка $(2x_1 - 1, 2y_1 - 1, 2z_1)$. Векторът $(-1, 2y_1 - 2y_1)$ (който според (3) е колинеарен с правата AC_b) е колинеарен с вектора $(2x_1 - 1, 2y_1 - 1, 2z_1)$ (определящ разглежданата безкрайна точка) тогава и само тогава, когато са изпълнени равенствата
$$\frac{2x_1 - 1}{-1} = \frac{2y_1 - 1}{2y_1} = \frac{2z_1}{1 - 2y_1}.$$

Лесно се вижда, че те са изпълнени точно когато $1 - 4xy_1 = 0$. Следователно правата AC_b е колинеарна с вектора $(2x_1 - 1, 2y_1 - 1, 2z_1)$ точно когато $I \in \chi_c$. По аналогичен начин от (4) следва, че BC_a е колинеарна със същия вектор точно когато $I \in \chi_c$. Така, когато $I \in \chi_c$, можем да определим безкрайната точка $L_c(I)$ $(2x_1 - 1, 2y_1 - 1, 2z_1)$ като обща точка на успоредните прави AC_b и BC_a .

По същия начин определяме безкрайните точки $L_a(I)$ $(2x_1, 2y_1 - 1, 2z_1 - 1)$ и $L_b(I)$ $(2x_1, -1, 2y_1, 2z_1 - 1)$, когато точката I лежи съответно върху хиперболите $\chi_a : 1 - 4yz = 0$ и $\chi_b : 1 - 4zx = 0$. Тъй като трите хиперболи нямат общи точки, то точките $L_a(I)$, $L_b(I)$ и $L_c(I)$ не могат да са едновременно безкрайни.

Ако $L_c(I)$ е безкрайна, то $CL_c(I)$ отново се представя с (9), затова и в този случай $T(I) \in CL_c(I)$.

Втората особеност в доказателството на свойство 1 е свързана с факта, че $T(I)$ съществува във вида, определен с (10) само когато I не лежи върху кривата от трета степен K_3 с уравнение $K_3 : 1 - 4xy - 4yz - 4zx + 12xyz = 0$ (Фиг. 10). Аналогично на разгледания случай с $L_c(I)$ забелязваме, че точката $T(I)$, определена с (10), когато $I \in K_3$, може да се представи във вида

$$(10') \quad T(I)(x_1(1 - 2y_1)(1 - 2z_1), y_1(1 - 2z_1)(1 - 2x_1), z_1(1 - 2x_1)(1 - 2y_1)).$$

В този случай от (7), (8) и (9) се вижда, че правите $AL_a(I)$, $BL_b(I)$ и $CL_c(I)$ са колинеарни с вектора $(x_1(1 - 2y_1)(1 - 2z_1), y_1(1 - 2z_1)(1 - 2x_1), z_1(1 - 2x_1)(1 - 2y_1))$, определящ безкрайната точка $T(I)$. По друг начин казано, тези прави са успоредни, когато $I \in K_3$. Освен това, общите точки на χ_c и K_3 са C_0 и безкрайните точки на CA и CB . Следователно точките $T(I)$ и $L_c(I)$ не могат едновременно да бъдат безкрайни.

Доказателството на свойство 2 се провежда по аналогичен начин. В същата последователност се получават съответните резултати, необходими за определяне на точката $T'(I)$. В началото намираме, че правата l'_c през I_c , успоредна на $I_A I_B$, се описва с параметричните уравнения:

$$(1') \quad l'_c : x = \frac{x_I}{1 - 2z_I} + x_I t', \quad y = \frac{y_I}{1 - 2z_I} - y_I t', \quad z = -\frac{z_I}{1 - 2z_I} + (y_I - x_I) t'.$$

От (1') намираме C_b' и C_a' във вида:

$$(2') \quad C_b' \left(0, \frac{2y_I}{1-2z_I}, \frac{2x_I-1}{1-2z_I} \right), C_a' \left(\frac{2x_I}{1-2z_I}, 0, \frac{2y_I-1}{1-2z_I} \right).$$

От (2') за правите AC_b' и BC_a' намираме съответно уравненията

$$(3') \quad AC_b' : x = 1 - (1 - 2z_I)t'_1, \quad y = 2y_I t'_1, \quad z = (2x_I - 1)t'_1,$$

$$(4') \quad BC_a' : x = 2x_I t'_2, \quad y = 1 - (1 - 2z_I)t'_2, \quad z = (2y_I - 1)t'_2.$$

От (3') и (4') определяме координатите на $L_c'(I) = AC_a' \cap BC_b'$ във вида

$$(5') \quad L_c'(I) \left(\frac{2x_I(2x_I-1)}{\tau'}, \frac{2y_I(2y_I-1)}{\tau'}, \frac{(2x_I-1)(2y_I-1)}{\tau'} \right),$$

където $\tau' = 1 - 4x_I y_I - 4y_I z_I - 4z_I x_I$.

Аналогично намираме координатите на точките $L_a'(I)$ и $L_b'(I)$ във вида:

$$(6') \quad L_a'(I) \left(\frac{(2y_I-1)(2z_I-1)}{\tau'}, \frac{2y_I(2y_I-1)}{\tau'}, \frac{2z_I(2z_I-1)}{\tau'} \right),$$

$$L_b'(I) \left(\frac{2x_I(2x_I-1)}{\tau'}, \frac{(2z_I-1)(2x_I-1)}{\tau'}, \frac{2z_I(2z_I-1)}{\tau'} \right),$$

където $\tau' = 1 - 4x_I y_I - 4y_I z_I - 4z_I x_I$.

От координатите (5') и (6') намираме уравненията на правите $AL_a'(I)$, $BL_b'(I)$ и $CL_c'(I)$:

$$(7') \quad AL_a'(I) : x = 1 + (2x_I y_I + 4y_I z_I + 2z_I x_I - y_I - z_I)t'_3, \quad y = y_I(2y_I - 1)t'_3, \quad z = z_I(2z_I - 1)t'_3,$$

$$(8') \quad BL_b'(I) : x = x_I(2x_I - 1)t'_4, \quad y = 1 + (2x_I y_I + 2y_I z_I + 4z_I x_I - z_I - x_I)t'_4, \quad z = z_I(1 - 2z_I)t'_4,$$

$$(9') \quad CL_c'(I) : x = x_I(2x_I - 1)t'_5, \quad y = y_I(2y_I - 1)t'_5, \quad z = 1 + (4x_I y_I + 2y_I z_I + 2z_I x_I - x_I - y_I)t'_5.$$

От (7') и (8') получаваме координатите на точката $T'(I) = AL_a'(I) \cap BL_b'(I)$:

$$(1) \quad T'(I) : \left(\frac{x_I(2x_I-1)}{\tau'}, \frac{y_I(2y_I-1)}{\tau'}, \frac{z_I(2z_I-1)}{\tau'} \right),$$

където $\tau' = 1 - 4x_I y_I - 4y_I z_I - 4z_I x_I$.

От симетричния вид на координатите на точката $T'(I)$ е ясно, че тя лежи и върху правата $CL_c'(I)$. Всъщност това лесно се проверява със заместване на (1) в (9'). С това свойство 2 е доказано.

Свойство 2 също се нуждае от някои уточнения, породени от резултатите, до-

вели до неговата доказателство. Точката $L_c'(I)$ съществува във вида, определен с (5') само когато точката I не лежи върху елипсата $k(G) : 1 - 4xy - 4yz - 4zx = 0$, която се допира до BC , CA и AB съответно в точките A_0, B_0 и C_0 (тя има за център медицентъра G на ΔABC) (Фиг. 10). Ако в числителите на (5') и (6') се използва $\tau' = 0$, се вижда, че и в трите случая се получава безкрайната точка $(x_1(2x_1 - 1), y_1(2y_1 - 1), z_1(2z_1 - 1))$. Същият резултат се получава от числителите на $T'(I)$ в (1). Както при свойство 1, от (3'), (4'), (7'), (8') и (9') се получава, че векторът, определящ тази точка, е колинеарен с всяка от правите $AC'_b, BC'_a, AL'_a(I), BL'_b(I)$ и $CL'_c(I)$. Следователно, когато $I \in k(G)$, правите $AL'_a(I), BL'_b(I)$ и $CL'_c(I)$ определят безкрайната точка $T'(I)$ във вида:

$$(11') \quad T'(I)(x_1(2x_1 - 1), y_1(2y_1 - 1), z_1(2z_1 - 1)).$$

Като се използва равенството $\tau' = 0$, координатното представяне (11') може да се запише и във вида

$$(11'') \quad T'(I)((1 - 2y_1)(1 - 2z_1), (1 - 2z_1)(1 - 2x_1), (1 - 2x_1)(1 - 2y_1)).$$

Накрая трябва да отбележим, че тъй като общите точки на кривите K_3 и $k(G)$ са само A_0, B_0 и C_0 (Фиг. 10), то $T(I)$ и $T'(I)$ не могат да бъдат едновременно безкрайни точки.

Доказателство на свойства 3 и 4. Асоциираните криви $\bar{k}(O)$ и $k(I)$ са от един и същи вид [4] и [5]. Видът на $\bar{k}(O)$ и $k(I)$, както е показано в (Ненков, 2008), зависи от броя на решенията на уравнението $y_1^2 x^2 + x_1^2 y^2 + (1 - 2z_1 - 2x_1 y_1)xy = 0$. Дискриминантата на квадратичната форма, участваща в това уравнение, е $D = -(1 - 2x_1)(1 - 2y_1)(1 - 2z_1)$. Затова $\bar{k}(O)$ е елипса точно когато $D < 0$ и хипербола – при $D > 0$.

1) Нека $\bar{k}(O)$ е елипса. Тогава неравенството $D < 0$ има решения в следните случаи:

$$1.1) x_1 < 0, y_1 > \frac{1}{2}, z_1 > \frac{1}{2}; 1.2) x_1 > \frac{1}{2}, y_1 < 0, z_1 > \frac{1}{2}; 1.3) x_1 > \frac{1}{2}, y_1 > \frac{1}{2}, z_1 < 0; 1.4) 0 < x_1 < \frac{1}{2}, 0 < y_1 < \frac{1}{2}, 0 < z_1 < \frac{1}{2}.$$

В случай 1.1), тъй като $x_1 < 0$, то $\tau < 0$ и $\tau' = (1 - 2y_1)^2 - 4z_1 x_1 > 0$. От (0) и (1) се вижда, че координатите на $T(I)$ и $T'(I)$ са положителни числа. Следователно $T(I)$ и $T'(I)$ са вътрешни за ΔABC . В случаите 1.2) и 1.3) аналогично се получава, че $T(I)$ и $T'(I)$ са вътрешни за ΔABC . В случай 1.4) се получават неравенствата $\tau = x_1(1 - 2y_1)(1 - 2z_1) + y_1(1 - 2z_1)(1 - 2x_1) + z_1(1 - 2x_1)(1 - 2y_1) > 0$, $\tau' = -(1 - 2x_1)(1 - 2y_1)(1 - 2z_1) - 8x_1 y_1 z_1 < 0$, от които лесно следва, че координатите в (10) и (11) са положителни числа. Следователно $T(I)$ и $T'(I)$ са вътрешни за ΔABC . С това свойство 3 е доказано.

2) Нека $\bar{k}(O)$ е хипербола. Тогава неравенството $D > 0$ има решения в следните случаи:

2.1) $x_1 > \frac{1}{2}$, $y_1 < \frac{1}{2}$, $z_1 < \frac{1}{2}$; 2.2) $x_1 < \frac{1}{2}$, $y_1 > \frac{1}{2}$, $z_1 < \frac{1}{2}$; 2.3) $x_1 < \frac{1}{2}$, $y_1 < \frac{1}{2}$, $z_1 > \frac{1}{2}$ (случаят 2.4) $x_1 > \frac{1}{2}$, $y_1 > \frac{1}{2}$, $z_1 > \frac{1}{2}$ е невъзможен, тъй като противоречи на равенството $x_1 + y_1 + z_1 = 1$).

В случай 2.1) има няколко възможности.

А) Ако $y_1 > 0$ и $z_1 < 0$, то числителят на втората координата в (10) е отрицателен, а другите два числителя са положителни. Затова, независимо от знака на τ , поне една от координатите в (10) е отрицателна. Следователно $T(I)$ е външна за ΔABC . Освен това, $\tau' = (1 - 2y_1)^2 - 4z_1x_1 > 0$, което означава, че втората координата в (11) е отрицателна. Следователно и $T'(I)$ е външна за ΔABC .

Б) Ако $y_1 < 0$ и $z_1 > 0$, аналогично на предишния случай се вижда, че $T(I)$ и $T'(I)$ са външни за ΔABC .

В) Ако $y_1 > 0$ и $z_1 > 0$, то $\tau > 0$, което показва, че втората и третата координати в (10) са отрицателни. Следователно $T(I)$ е външна за ΔABC . От друга страна числителят на първата координата в (11) е положителен, а другите два числителя са отрицателни. Затова, независимо от знака на τ' , поне една от координатите в (11) е отрицателна. Следователно и $T'(I)$ е външна за ΔABC . Г) Ако $y_1 < 0$ и $z_1 < 0$, то $\tau > 0$, което показва, че и трите координати в (10) са положителни. Следователно $T(I)$ е вътрешна за ΔABC . Освен това $\tau' = x_1(2x_1 - 1) + y_1(2y_1 - 1) + z_1(2z_1 - 1) > 0$, което показва, че и трите координати в (11) са положителни. Следователно и $T'(I)$ е вътрешна за ΔABC .

По аналогичен начин се разглеждат случаите 2.2) и 2.3).

Доказателство на свойство 5. Първо ще разгледаме случая, когато $T(I)$ и $T'(I)$ са крайни точки. За целта използваме, че точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ лежат на една права точно когато е изпълнено равенството:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad [6].$$

Като се вземе предвид, че $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, с непосредствено заместване в (12) на координатите от (10) и (11) се установява, че точките $T(I)$, $T'(I)$ и G лежат на една права.

Ако $T(I)$ е безкрайна, от равенството $\tau = 0$ следва, че

$$\overline{T'(I)G} \left(\frac{x_I(1-2y_I)(1-2z_I)}{12x_I y_I z_I}, \frac{y_I(1-2z_I)(1-2x_I)}{12x_I y_I z_I}, \frac{z_I(1-2x_I)(1-2y_I)}{12x_I y_I z_I} \right),$$

което според (10') означава, че $\overline{T'(I)G}$ е колинеарен с вектора, определящ $T(I)$.

Ако $T(I)$ е безкрайна, от равенството $\tau' = 0$ следва, че

$$\overline{T(I)G} \left(\frac{x_I(1-2x_I)}{12x_I y_I z_I}, \frac{y_I(1-2y_I)}{12x_I y_I z_I}, \frac{z_I(1-2z_I)}{12x_I y_I z_I} \right),$$

което според (11') означава, че $\overline{T(I)G}$ е колинеарен с вектора, определящ $T'(I)$.

Доказателство на свойство 6. В (Ненков, 2010) е показано, че точката на Жергон има следното координатно представяне:

$$(13) \quad J \left(-\frac{(1-2y_I)(1-2z_I)}{\tau'}, -\frac{(1-2z_I)(1-2x_I)}{\tau'}, -\frac{(1-2x_I)(1-2y_I)}{\tau'} \right).$$

Когато J е крайна, свойство 6 се получава, като се провери равенството (12) чрез заместване на (10), (11) и (13).

Ако $\tau' = 0$, точките J и $T'(I)$ са едновременно безкрайни. Нещо повече, от (13) и (11') се вижда, че те съвпадат. Следователно, когато J е безкрайна, свойство 6 е изпълнено.

Ако $T(I)$ е безкрайна, от равенството $\tau' = 0$ следва, че

$$\overline{JT'(I)} \left(\frac{3x_I(1-2y_I)(1-2z_I)}{\tau'}, \frac{3y_I(1-2z_I)(1-2x_I)}{\tau'}, \frac{3z_I(1-2x_I)(1-2y_I)}{\tau'} \right),$$

което според (10') означава, че $\overline{JT'(I)}$ е колинеарен с вектора, определящ $T(I)$.

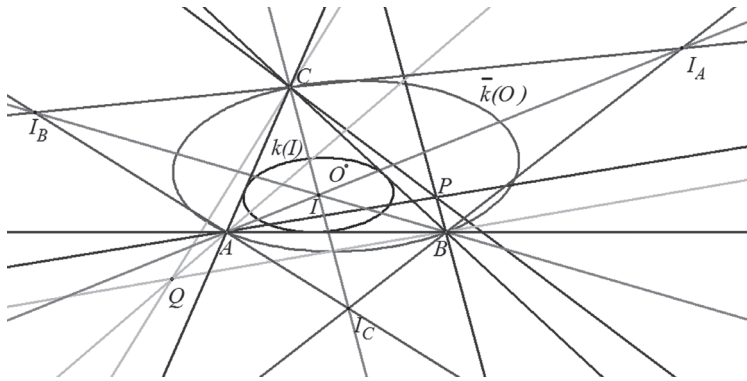
Точките T и T' , определени в (Grozdev & Nenkov, 2010), са изогонално спрегнати спрямо ΔABC . Интересно е по-общо дали определените точки $T(I)$ и $T'(I)$ притежават подобно свойство. За да намерим такова свойство, ще въведем понятието спрегнатост спрямо описана за ΔABC крива.

Изображение спрямо описана крива. Първо, ще припомним две добре познати изображения в равнината на ΔABC . Изогоналното изображение съпоставя на крайна точка $P(x_P, y_P, z_P)$, нележаща върху описаната за ΔABC окръжност Γ , пресечната точка $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ на правите AQ , BQ и CQ , които са симетрични съответно на AP , BP и CP спрямо съответните ъглополовящи при върховете A , B и C на ΔABC . Координатите на Q се изразяват с формулите

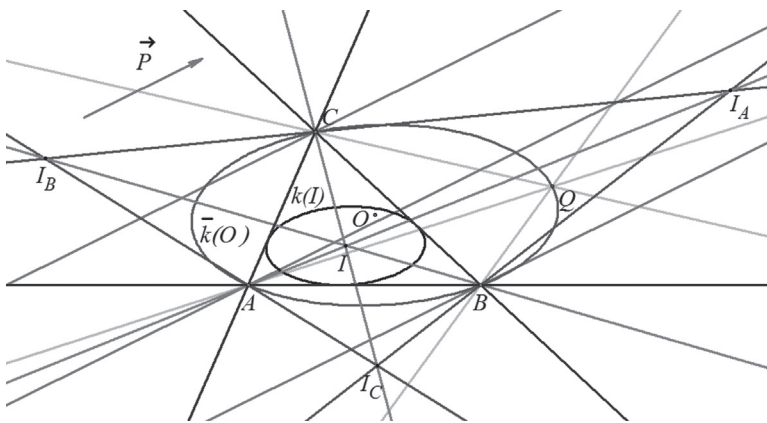
$$(14) \quad x_Q = \frac{a^2 y_P z_P}{\vartheta}, \quad y_Q = \frac{b^2 z_P x_P}{\vartheta}, \quad z_Q = \frac{c^2 x_P y_P}{\vartheta},$$

където $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ и $\vartheta = a^2 y_P z_P + b^2 z_P x_P + c^2 x_P y_P$ (Паскалев & Чобанов, 1985) (с. 64–67).

Ако $P \in \Gamma : a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$, тогава като образ на P разглеждаме безкрайната точка Q , определена от направлението на успоредните прави, които са симетрични съответно на AP, BP и CP спрямо съответните ъглополовящи при върховете A, B и C на ΔABC (Хитов, 1990) (с. 237–238, зад. 1061). Ако P е безкрайна, чрез конструкция обратна на последната, като образ на P получаваме точка Q от Γ . Във всички възможни случаи точката образ Q се получава след прилагане на осев симетрии спрямо ъглополовящите при върховете на ΔABC . Двойките съответни прави $AP, AQ; BP, BQ$ и CP, CQ при тези симетрии могат да се разглеждат като хармонично спрегнати спрямо двойките ъглополовящи на ΔABC съответно при върховете A, B и C . Самите двойки ъглополовящи са хармонично спрегнати спрямо двойките страни на ΔABC през съответните върхове A, B и C .



Фигура 11



Фигура 12

Изотомичното изображение съпоставя на крайна точка $P(x_p, y_p, z_p)$, нележаща върху описаната за ΔABC , елипса $\bar{k}(G)$ с център медицентъра G на ΔABC , пресечната точка $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ на правите AQ , BQ и CQ , минаващи през точките, които са симетрични съответно на пресечните точки на AP , BP и CP с правите BC , CA и AB спрямо съответните среди A_0 , B_0 и C_0 на страните на ΔABC . Координатите на Q се изразяват с формулите

$$(15) \quad x_Q = \frac{y_p z_p}{\vartheta'}, \quad y_Q = \frac{z_p x_p}{\vartheta'}, \quad z_Q = \frac{x_p y_p}{\vartheta'},$$

където $\vartheta' = y_p z_p + z_p x_p + x_p y_p$ ((Гушев & Гушев, 2011), (Паскалев & Чобанов, 1985) (с. 69–71)).

Ако $P \in \bar{k}(G)$: $yz + zx + xy = 0$, тогава като образ на P разглеждаме безкрайната точка Q , определена от направлението на успоредните прави, минаващи през точките, които са симетрични съответно на пресечните точки на AP , BP и CP с правите BC , CA и AB спрямо съответните среди A_0 , B_0 и C_0 на страните на ΔABC (Гушев & Гушев, 2011). Ако P е безкрайна, чрез конструкция обратна на последната, като образ на P получаваме точка Q от $\bar{k}(G)$.

Нека g_a , g_b и g_c са правите, минаващи съответно през A , B и C , успоредно на срещуположните им BC , CA и AB . Означаваме $G_A = g_b \cap g_c$, $G_B = g_c \cap g_a$ и $G_C = g_a \cap g_b$. Двойките съответни прави AP , AQ ; BP , BQ и CP , CQ при изотомичното изображение могат да се разглеждат като хармонично спрегнати спрямо двойките прави AG , g_a ; BG , g_b и CG , g_c съответно във върховете A , B и C . Самите двойки прави AG , g_a ; BG , g_b и CG , g_c са хармонично спрегнати спрямо двойките страни на ΔABC през съответните върхове A , B и C .

Изводите, които направихме за тези изображения, показват, че може да се търси тяхно обобщение по следния начин: Нека $I(x_I, y_I, z_I)$ е произволна точка ($x_I + y_I + z_I = 1$ или $x_I + y_I + z_I = 0$), която не лежи върху никоя от правите BC , CA , AB , B_0C_0 , C_0A_0 и A_0B_0 , а точките

$$I_A \left(\frac{-x_I}{-x_I + y_I + z_I}, \frac{y_I}{-x_I + y_I + z_I}, \frac{z_I}{-x_I + y_I + z_I} \right),$$

$$I_B \left(\frac{x_I}{x_I - y_I + z_I}, \frac{-y_I}{x_I - y_I + z_I}, \frac{z_I}{x_I - y_I + z_I} \right),$$

$$I_C \left(\frac{x_I}{x_I + y_I - z_I}, \frac{y_I}{x_I + y_I - z_I}, \frac{-z_I}{x_I + y_I - z_I} \right),$$

определят $\Delta I_A I_B I_C$, който е спрегнат на I спрямо ΔABC (Паскалев & Чобанов, 1985) (с. 67). Сега, ако $P(x_p, y_p, z_p)$ е произволна точка, нележаща върху никоя от правите BC , CA и AB , въвеждаме означенията $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$ и $C_1 = CP \cap AB$.

Нека AA_2 ($A_2 \in BC$) е хармонично спрегната на AA_1 спрямо AI и $I_B I_C$, BB_2 ($B_2 \in CA$) е хармонично спрегната на BB_1 спрямо BI и $I_C I_A$, а CC_2 ($C_2 \in AB$) е хармонично спрегната на CC_1 спрямо CI и $I_A I_B$. По аналогия със споменатите частни случаи може да се предположи, че правите AA_2 , BB_2 и CC_2 минават през една точка $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ (Фиг. 11). Експериментите с GSP потвърждават това предположение.

От друга страна, изогоналното и изотомичното изображения имат по една особена крива от втора степен (окръжност и елипса), която се изобразява в безкрайната права. Освен това, както се вижда от (14) и (15), полиномът на тази крива участва в координатното представяне на точката образ. Затова, тъй като описаната за ΔABC крива $\bar{k}(O)$, асоциирана с $k(I)$, притежава уравнение

$$(16) \quad \bar{k}(O): x_I^2 y z + y_I^2 z x + z_I^2 x y = 0,$$

може да се предполага, че образът Q на точка $P \notin \bar{k}(O)$ има координати, които се изразяват със следните равенства:

$$(17) \quad x_Q = \frac{x_I^2 y_P z_P}{\vartheta_I(P)}, \quad y_Q = \frac{y_I^2 z_P x_P}{\vartheta_I(P)}, \quad z_Q = \frac{z_I^2 x_P y_P}{\vartheta_I(P)},$$

където $\vartheta_I(P) = x_I^2 y_P z_P + y_I^2 z_P x_P + z_I^2 x_P y_P$.

Наблюденията с GSP показват, че точката Q , построена по координатите (17), съвпада с точката Q , получена при предишната конструкция (Фиг. 11). Нещо повече, когато $P \notin \bar{k}(O)$, правите AA_2 , BB_2 и CC_2 са успоредни, т.е. точката Q е безкрайна. Обратно, когато AA_1 , BB_1 и CC_1 са успоредни (точката P е безкрайна), правите AA_2 , BB_2 и CC_2 се пресичат в точка Q от $\bar{k}(O)$ (Фиг. 12). Всички тези наблюдения ни дават основание да разглеждаме *изображение в равнината на ΔABC спрямо описаната му крива $\bar{k}(O)$, при което точките P и Q наричаме спрегнати спрямо $\bar{k}(O)$.*

Преминаваме към доказателство на направените заключения. Нека

$$AI \cap BC = L_1 \left(0, \frac{y_I}{y_I + z_I}, \frac{z_I}{z_I + y_I} \right) \quad \text{и} \quad I_B I_C \cap BC = L_2 \left(0, \frac{y_I}{y_I - z_I}, \frac{z_I}{z_I - y_I} \right).$$

Ако A_1 не е безкрайната точка на BC , то $A_1 \left(0, \frac{y_P}{y_P + z_P}, \frac{z_P}{z_P + y_P} \right)$. От хармоничността следва, че са изпълнени равенствата $s = \frac{L_1 A_1}{L_2 A_1} = -\frac{L_1 A_2}{L_2 A_2}$. Затова

$\overrightarrow{OA_1} = \frac{\overrightarrow{OL_1} - s \overrightarrow{OL_2}}{1 - s}$ и $\overrightarrow{OA_2} = \frac{\overrightarrow{OL_1} + s \overrightarrow{OL_2}}{1 + s}$. Първото от тези равенства заедно с координатите на A_1 води до $s = \frac{y_I - z_I}{y_I + z_I} \cdot \frac{y_I z_P - y_P z_I}{y_I z_P + y_P z_I}$, от което заедно с второто

определяме координатите на A_2 във вида $A_2 \left(0, \frac{y_I^2 z_P}{y_I^2 z_P + z_I^2 y_P}, \frac{z_I^2 y_P}{y_I^2 z_P + z_I^2 y_P} \right)$. Аналогично от $B_1 \left(\frac{x_P}{x_P + z_P}, 0, \frac{z_P}{z_P + x_P} \right)$ и $C_1 \left(\frac{x_P}{x_P + y_P}, \frac{y_P}{y_P + x_P}, 0 \right)$ се намират точките B_2 и C_2 във вида $B_2 \left(\frac{x_I^2 z_P}{x_I^2 z_P + z_I^2 x_P}, 0, \frac{z_I^2 x_P}{x_I^2 z_P + z_I^2 x_P} \right)$ и $C_2 \left(\frac{x_I^2 y_P}{x_I^2 y_P + y_I^2 x_P}, \frac{y_I^2 x_P}{x_I^2 y_P + y_I^2 x_P}, 0 \right)$.

Сега, ако $P \notin \bar{k}(O)$, установяваме, че координатите A, A_2 и точката Q , определена

с (17), удовлетворяват равенството (12), което означава, че тези точки лежат на една права, т.е. AA_2 минава през Q . Аналогично се установява, че правите BB_2 и CC_2 минават през точката Q , определена с (17). Ако $P \in \bar{k}(O)$, изпълне но е равенството $\vartheta_j(P) = 0$. Следователно съществува безкрайна точка Q , определена от направлението на вектора

$$(17') \quad \vec{Q}(x_I^2 y_P z_P, y_I^2 z_P x_P, z_I^2 x_P y_P).$$

С помощта на равенството $\vartheta_j(P) = 0$ лесно се проверява, че векторите $\overline{AA_2}$, $\overline{BB_2}$ и $\overline{CC_2}$ са колинеарни с вектора \vec{Q} , определен с (17'). Обратно, ако P е безкрайна точка, можем да я разглеждаме като обща точка на успоредните прави AA_2, BB_2 и CC_2 , а съответната ѝ Q е пресечната точка на правите AA_1, BB_1 и CC_1 върху $\bar{k}(O)$ и има координати, представящи се с (17) (в този случай трябва да се има предвид, че е изпълнено равенството $x_p + y_p + z_p = 0$).

Ако $A_1(0, -1, 1)$ е безкрайната точка на правата BC , т.е. $P \in g_a$, то координатното представяне на P е $P(1, -p, p)$, където p е реално число. В този случай

$A_2 \left(0, \frac{y_I^2}{y_I^2 - z_I^2}, \frac{z_I^2}{z_I^2 - y_I^2} \right)$ е средата на отсечката $L_1 L_2$. Координатите на A_2 могат да се получат от предишния случай при $y_p = -p$ и $z_p = p$. Затова всички получени резултати са приложими и в този случай.

Ако $I \equiv G \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$, точките $A_2 \left(0, \frac{z_P}{z_P + y_P}, \frac{y_P}{y_P + z_P} \right)$, $B_2 \left(\frac{z_P}{z_P + x_P}, 0, \frac{x_P}{x_P + z_P} \right)$ и $C_2 \left(\frac{y_P}{y_P + x_P}, \frac{x_P}{x_P + y_P}, 0 \right)$, симетрични на A_1, B_1 и C_1 съответно спрямо A_0, B_0 и C_0 , се получават от съответните точки, получени при $I \neq G$, като се замести $x_p = y_p = z_p = \frac{1}{3}$. Следователно всички резултати, получени при $I \neq G$, са приложими и при $I \equiv G$, т.е. при изотомичното изображение.

Във всички случаи, ако P е точка върху някоя от правите $AI, BI, CI, I_B I_C, I_C I_A$ и $I_A I_B$, нейният образ Q лежи върху същата права. Затова трябва да се очаква, че точките I, I_A, I_B и I_C са единствените двойни елементи на изображението спрямо $\bar{k}(O)$. Аналитично това може да се установи така: ако P е двоен елемент на разглежданото изображение, от (17) следва, че са изпълнени равенствата

$$\left(\frac{x_P}{x_I}\right)^2 = \left(\frac{y_P}{y_I}\right)^2 = \left(\frac{z_P}{z_I}\right)^2 = \frac{x_P y_P z_P}{\vartheta_I(P)} = l_I^2.$$

Оттук следва, че $x_P = \varepsilon_1 L_I x_I, y_P = \varepsilon_2 L_I y_I$ и $z_P = \varepsilon_3 L_I z_I$, където $\varepsilon_1 \pm 1, \varepsilon_2 \pm 1$ и $\varepsilon_3 \pm 1$. Ако P е крайна точка, от равенството $x_P + y_P + z_P = 1$ следва, че $x_P = \frac{\varepsilon_1 x_I}{\varepsilon_1 x_I + \varepsilon_2 y_I + \varepsilon_3 z_I}$, $y_P = \frac{\varepsilon_2 y_I}{\varepsilon_1 x_I + \varepsilon_2 y_I + \varepsilon_3 z_I}$ и $z_P = \frac{\varepsilon_3 z_I}{\varepsilon_1 x_I + \varepsilon_2 y_I + \varepsilon_3 z_I}$. Тези равенства показват, че единствените двойни точки са I, I_A, I_B и I_C . Ако P е безкрайна точка, от равенството $x_P + y_P + z_P = 0$ следва, че $\varepsilon_1 x_I + \varepsilon_2 y_I + \varepsilon_3 z_I = 0$. Последното равенство означава, че някоя от точките I, I_A, I_B и I_C е безкрайна и P съвпада с тази точка. Следователно изображението спрямо $\bar{k}(O)$ има безкрайна двойна точка точно когато $\bar{k}(O)$ е параболата и безкрайната точка на параболата е точно тази двойна точка.

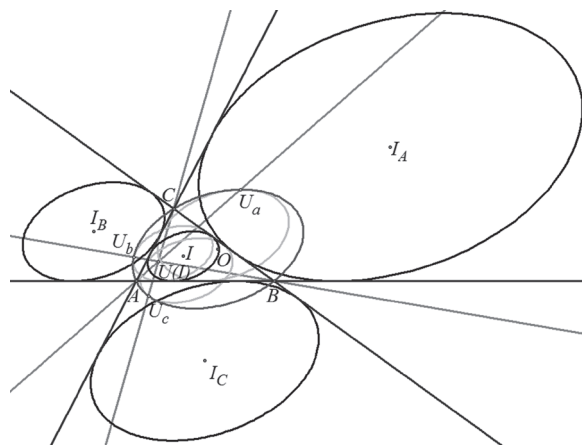
Спрегнатост на точките $T(I)$ и $T'(I)$ спрямо $\bar{k}(O)$. След като вече е определено понятието изображение спрямо кривата $\bar{k}(O)$, с GSP можем да определим образите на точките $T(I)$ и $T'(I)$ спрямо $\bar{k}(O)$. Наблюдаваният резултат може да се формулира по следния начин:

Свойство 7. *Точките $T(I)$ и $T'(I)$ са спрегнати спрямо $\bar{k}(O)$.*

Доказателството на това свойство се получава, като чрез (10) и (11) се провери, че са изпълнени равенствата (17).

Трябва да се отбележи, че ако някоя от точките $T(I)$ и $T'(I)$ е безкрайна, другата лежи върху $\bar{k}(O)$. Това обяснява, установения по-рано факт, че точките $T(I)$ и $T'(I)$ не могат да са едновременно безкрайни.

Определянето на точките $T(I)$ и $T'(I)$, както и техните свойства, по никакъв начин не зависи от допирните точки на кривите, допиращи се до $\bar{k}(O)$. Интересно е да се намерят тези допирни точки и да се открият някои техни свойства.



Фигура 13

Допирни точки на кривите $k_a(I(A))$, $k_b(I(B))$, $k_c(I(C))$, $k'_a(I'(A))$, $k'_b(I'(B))$, $k'_c(I'(C))$ с $\bar{k}(O)$ (Фиг 13, 14). За да намерим допирните точки, определяме уравненията на кривите. При определяне на уравнението на $k_c(I(C))$ първо намираме координатите на центъра $I(C)$. За целта намираме уравнението на правата s_a , минаваща през точката C_a и колинеарна с вектора \overrightarrow{IB}_I ($B_I \left(\frac{1-2z_I}{2y_I}, 0, \frac{1-2x_I}{2y_I} \right)$) е допирната точка на $k(I)$ с CA (Ненков, 2010) и уравнението на правата s_b , минаваща през точката C_b и колинеарна с вектора \overrightarrow{IA}_I ($B_I \left(0, \frac{1-2z_I}{2x_I}, \frac{1-2y_I}{2x_I} \right)$), е допирната точка на $k(I)$ с BC (Ненков, 2010). След решаване на системата от получените уравнения намираме

$$I(C) \left(\frac{4x_I^2 y_I}{1-2z_I}, \frac{4x_I y_I^2}{1-2z_I}, \frac{4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)}{1-2z_I} \right).$$

Сега уравнението на $k_c(I(C))$ намираме по условията, че тази крива минава през C_a и C_b , допират се до CA и CB съответно в тези точки и минава през точката, симетрична на C_a (или C_b) спрямо $I(C)$. Резултатът, който получаваме, е следният:

$$k_c(I(C)): y_I^2(1-2x_I)^2 x^2 + x_I^2(1-2y_I)^2 y^2 + 4x_I^2 y_I^2 z^2 - 4x_I^2 y_I(1-2y_I)yz - 4x_I y_I^2(1-2x_I)zx - (1-2x_I)(1-2y_I)(1-2x_I y_I)xy = 0.$$

Като се заместят равенствата $x^2 = x - xy - zx$, $y^2 = y - yz - zx$ и $z^2 = z - yz - zx$, последното уравнение приема следния по-удобен вид:

$$(18) \quad k_c(I(C)): x_I^2 yz + y_I^2 zx + z_I^2 xy - y_I^2(1-2x_I)^2 x - x_I^2(1-2y_I)^2 y - 4x_I^2 y_I^2 z = 0.$$

От (16) и (18) получаваме координатите на допирната точка U_c на $k_c(I(C))$ с $\bar{k}(O)$ във вида

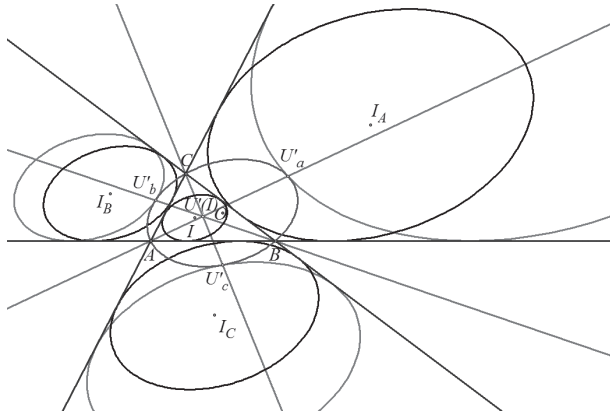
$$(19) \quad U_c \left(\frac{2x_I^2 2y_I - 1}{u_c(I)}, \frac{2y_I^2 2x_I - 1}{u_c(I)}, \frac{z_I 2x_I - 1 2y_I - 1}{u_c(I)} \right),$$

където $u_c(I) = (1 - 3x_I)(1 - 3y_I) - x_I y_I$.

Ако точката I лежи върху хиперболата $\bar{\chi}_c : (1 - 3x)(1 - 3y) - xy = 0$ (Фиг. 15), кривите $k_c(I(C))$ и $\bar{k}(O)$ имат обща безкрайна точка, определена с

$$(19') \quad U_c(2x_I^2(2y_I - 1), 2y_I^2(2x_I - 1), z_I(2x_I - 1)(2y_I - 1)).$$

В тези случаи $k_c(I(C))$ и $\bar{k}(O)$ имат обща асимптота.



Фигура 14

Аналогично на (19) намираме допирните точки U_a и U_b на $\bar{k}(O)$ съответно с $k_a(I(A))$ и $k_b(I(B))$ във вида:

$$(20) \quad U_a \left(\frac{x_I(2y_I - 1)(2z_I - 1)}{u_a(I)}, \frac{2y_I^2(2z_I - 1)}{u_a(I)}, \frac{2z_I^2(2y_I - 1)}{u_a(I)} \right),$$

$$(21) \quad U_b \left(\frac{2x_I^2(2z_I - 1)}{u_b(I)}, \frac{y_I(2z_I - 1)(2x_I - 1)}{u_b(I)}, \frac{2z_I^2(2x_I - 1)}{u_b(I)} \right),$$

където $u_a(I) = (1 - 3y_I)(1 - 3z_I) - y_I z_I$ и $u_b(I) = (1 - 3z_I)(1 - 3x_I) - z_I x_I$.

Когато I е точка върху някоя от хиперболите $\bar{\chi}_a : (1 - 3y)(1 - 3z) - yz = 0$ и $\bar{\chi}_b : (1 - 3z)(1 - 3x) - zx = 0$, съответната от кривите $k_a(I(A))$ и $k_b(I(B))$ има обща асимптота с $\bar{k}(O)$.

За да определим допирната точка U_c' на $k_c'(I'(C))$ с $\bar{k}(O)$, намираме, че центърът на $k_c'(I'(C))$ е

$$I'(C) \left(\frac{4x_I^2 y_I}{(1-2z_I)^2}, \frac{4x_I y_I^2}{(1-2z_I)^2}, \frac{-4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}{(1-2z_I)^2} \right),$$

откъдето получаваме уравнението на $k_c'(I'(C))$ във вида

$$k_c'(I'(C)): y_I^2(1-2y_I)^2 x^2 + x_I^2(1-2x_I)^2 y^2 + 4x_I^2 y_I^2 z^2 + 4x_I^2 y_I(1-2x_I)yz + 4x_I y_I^2(1-2y_I)zx - (1-2x_I)(1-2y_I)((1-2z_I)^2 - 2x_I y_I) = 0.$$

Последното уравнение записваме в следния по-удобен вид

$$(22) k_c'(I'(C)): (1-2z_I)^2(x_I^2 yz + y_I^2 zx + z_I^2 xy) - y_I^2(1-2y_I)^2 x - x_I^2(1-2x_I)^2 y - 4x_I^2 y_I^2 z = 0.$$

От (16) и (22) получаваме координатите на допирната точка U_c' на $k_c'(I'(C))$ с $\bar{k}(O)$ във вида

$$(23) U_c' \left(\frac{2x_I^2(1-2x_I)}{u_c'(I)}, \frac{2y_I^2(1-2y_I)}{u_c'(I)}, -\frac{z_I(1-2x_I)(1-2y_I)}{u_c'(I)} \right),$$

където $u_c'(I) = (1-2z_I)(2(1-2x_I)(1-2y_I) + z_I(1-2z_I))$.

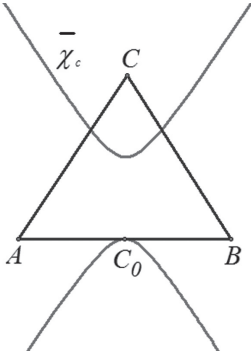
Аналогично на (23) намираме допирните точки U_a' и U_b' на $\bar{k}(O)$ съответно с $k_a'(I'(A))$ и $k_b'(I'(B))$ във вида:

$$(24) U_a' \left(\frac{x_I(1-2y_I)(1-2z_I)}{u_a'(I)}, \frac{2y_I^2(1-2y_I)}{u_a'(I)}, \frac{2z_I^2(1-2z_I)}{u_a'(I)} \right),$$

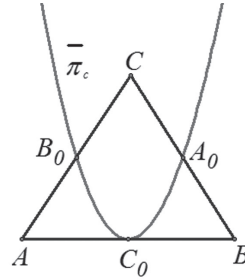
$$(25) U_b' \left(\frac{2x_I^2(1-2x_I)}{u_b'(I)}, -\frac{y_I(1-2z_I)(1-2x_I)}{u_b'(I)}, \frac{2z_I^2(1-2z_I)}{u_b'(I)} \right),$$

където $u_a'(I) = (1-2x_I)(2(1-2y_I)(1-2z_I) + x_I(1-2x_I))$ и $u_b'(I) = (1-2y_I)(2(1-2z_I)(1-2x_I) + y_I(1-2y_I))$.

Когато I е точка върху някоя от параболите $\bar{\pi}_a: 2(1-2y)(1-2z) + x(1-2x)$, $\bar{\pi}_b: 2(1-2z)(1-2x) + y(1-2y) = 0$ и $\bar{\pi}_c: 2(1-2x)(1-2y) + z(1-2z) = 0$ (Фиг. 16), съответната от кривите $k_a'(I'(A))$, $k_b'(I'(B))$ и $k_c'(I'(C))$ има обща асимптота с $\bar{k}(O)$.



Фигура 15



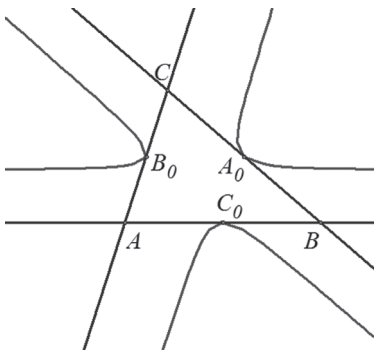
Фигура 16

Чевiani, породени от допирните точки. Естествено е да се запитаме дали допирните точки определят чевiani с върховете на $\triangle ABC$. Експериментите с GSP показват следните резултати

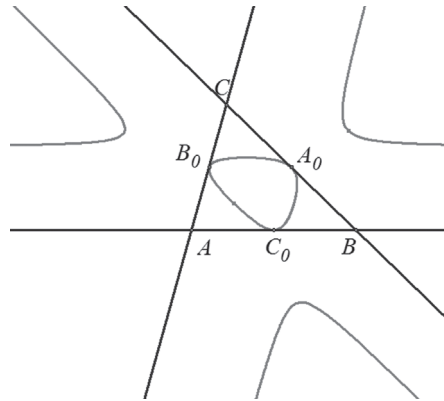
Свойство 8. Правите AU_a , BV_b и CU_c минават през една точка $U(I)$ (Фиг. 13).

Свойство 9. Правите AU'_a , BV'_b и CU'_c минават през една точка $U'(I)$ (Фиг. 14).

В тези свойства се разбира, че точките $U(I)$ и $U'(I)$ могат да бъдат безкрайни.



Фигура 17



Фигура 18

Установяването на свойство 8 се извършва, като се намерят уравненията на правите AU_a и BV_b , а след това се намери решението на системата, получена от тези уравнения. Накрая проверяваме, че координатите на получената точка са решение и на уравнението на правата CU_c . Резултатът, който получаваме за $U(I)$, е

$$(26) \quad U(I) \left(\frac{x_I^2(1-2y_I)(1-2z_I)}{u(I)}, \frac{y_I^2(1-2z_I)(1-2x_I)}{u(I)}, \frac{z_I^2(1-2x_I)(1-2y_I)}{u(I)} \right),$$

където $u(I) = 1 - 4x_I y_I - 4y_I z_I - 4z_I x_I + 10x_I y_I z_I$.

Ако точката I лежи върху кривата от трета степен $U_3 : 1 - 4xy - 4yz - 4zx + 10xyz = 0$ (Фиг. 17), точката $U(I)$ е безкрайна и в координати се представя по следния начин:

$$(26') \quad U(I) (x_I^2(1-2y_I)(1-2z_I), y_I^2(1-2z_I)(1-2x_I), z_I^2(1-2x_I)(1-2y_I)).$$

Аналогично за точката $U'(I)$ получаваме

$$(27) \quad U'(I) \left(\frac{x_I^2(1-2x_I)}{u'(I)}, \frac{y_I^2(1-2y_I)}{u'(I)}, \frac{z_I^2(1-2z_I)}{u'(I)} \right),$$

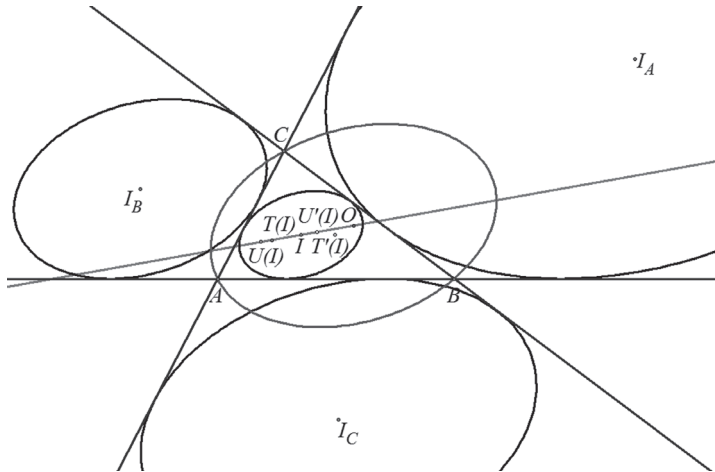
където $u'(I) = -2(1 - 4x_I y_I - 4y_I z_I - 4z_I x_I + 6x_I y_I z_I)$.

Когато точката I лежи върху кривата от трета степен

$U_3' : 1 - 4xy - 4yz - 4zx + 6xyz = 0$ (Фиг. 18), точката $U'(I)$ е безкрайна и координатите ѝ са:

$$(27') \quad U'(I) (x_I^2(1-2x_I), y_I^2(1-2y_I), z_I^2(1-2z_I)).$$

Точките $U(I)$ и $U'(I)$, също както $T(I)$ и $T'(I)$, не могат да бъдат едновременно безкрайни.



Фигура 19

Едно свойство на колинеарност. Любопитно е да се намери връзка на получените точки $U(I)$ и $U'(I)$ с други забележителни точки, определени от раз-

глежданата конфигурация от асоциирани криви. Построенията с GSP показват, че е изпълнено следното

Свойство 10. Точките $U(I)$, $U'(I)$, $T(I)$, I и O лежат на една права (Фиг. 19).

За да се докаже последното свойство, е достатъчно да се провери три пъти равенството (12) за тройките точки $U(I)$, $U'(I)$, $T(I)$; $U(I)$, $U'(I)$, I и $U(I)$, $U'(I)$, O като се използват (26), (27), (10) и координатите на O , получени в (Ненков, 2008), които се изразяват по следния начин:

$$(28) O \left(\frac{(1-2x_I - 2y_I z_I)x_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{(1-2y_I - 2z_I x_I)y_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{(1-2z_I - 2x_I y_I)z_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гушев, А. & Гушев, В. (2011). Приложение на понятието масов център в геометрията. *Математика, 1*, 14–24.
2. Гушев, А. & Гушев, В. (2011). Още за изотомичните елементи в триъгълника и изотомичното изображение. *Математика, 2*, 25–35.
3. Ненков, В. (1991). Отношение на радиусите на две окръжности. *Обучението по математика и информатика, 1*, 63–64.
4. Ненков, В. (2008). Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика, 2*, 35–42.
5. Ненков, В. (2010). Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика, 5*, 42–61.
6. Паскалев, Г. & Чобанов, И. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
7. Хитов, Х. (1990). *Геометрия на триъгълника*. София: Народна просвета.
8. Grozdev, S. & Nenkov, V. (2010). Two Remarkable Points of the Triangle Geometry. In: *Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications, Proceedings of the anniversary international conference, 10-12. 2010*, 349–354.

TWO PAIRS OF POINTS, GENERATED BY CENTRAL CONICS WITH RESPECT TO A TRIANGLE

Abstract. The software program “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP) is used in the paper to discover various interesting properties of special conics associated with a given $\triangle ABC$. Mathematical proofs of the discovered properties are proposed too. For example, consider a point I in the plane of $\triangle ABC$ and its conjugate $\Delta I_A I_B I_C$ with respect to $\triangle ABC$. The points I, I_A, I_B and I_C are centres of conics $k(I), k(I_A), k(I_B)$ and $k(I_C)$, inscribed in $\triangle ABC$, while the mid-points of the segments $I_A, I_B, I_C, I_B I_C, I_C I_A$, and $I_A I_B$ lie on a conic $\bar{k}(O)$, which is circumscribed for $\triangle ABC$. Let the line I , parallel to $I_A I_B$, intersects CA and CB in points C_a and C_b respectively, while the line I_c , parallel to $I_A I_B$, intersects CA and CB in points C'_a and C'_b respectively. Let $L_c(I) = AC_a \cap BC_b$ and $L'_c(I_C) = AC'_a \cap BC'_b$. Analogously, determine the points $L_a(I), L_b(I), L'_a(I_A)$ and $L'_b(I_B)$. Then, the lines $AL_a(I), BL_b(I)$ and $CL_c(I)$ are concurrent with a point $T(I)$. A variety of configurations and properties are considered in the paper too.

✉ Sava Grozdev
Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
sava.grozdev@gmail.com

Veselin Nenkov
Doctor in Mathematics
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street
Lovech
vnenkov@mail.bg