

ДВЕ ДИДАКТИЧЕСКИ СЪЛБИ

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Резюме. В средата на 2003 г. осем държави от Европейския съюз – България, Великобритания (по-късно заместена от Унгария), Германия, Гърция, Италия, Кипър, Румъния и Чехия, дадоха старт на широко мащабния европейски проект “MATHEU: откриване, мотивиране и подкрепа на математическите таланти в европейските училища”. Една от основните задачи на проекта беше създаването на системи от задачи с нарастваща трудност, наречени *стълби*, с помощта на които да се осъществяват поставените цели. Настоящата статия е посветена на две такива стълби.

Keywords: problem solving, didactical ladder, mathematical talent, identification, motivation.

Увод. Една от задачите, които трябваше да реши европейският проект MATHEU, беше да изгради система за откриване, мотивиране и подкрепа на талантиливи ученици по математика (Кендеров & Гроздев, 2004), която да работи в полза на всички страни-членки на ЕС. Някои от главните дейности на проекта MATHEU включват:

- Анализ на гъвкавостта на съществуващото учебно съдържание по математика в европейските училища с ударение върху страните-партньори и фокусиране върху талантиливите ученици.
- Анализ на използваните в европейските страни методи и инструменти за откриване, мотивиране и подкрепа на талантиливите ученици по математика.
- Разработване на методи и инструменти за откриване на потенциално талантиливи ученици на ниво начално и средно образование и за подготовка на учители така, че да осигуряват на учениците условия за изразяване на своя талант по математика (Гроздев & Кендеров, 2005).
- Разработване на специална педагогическа методика и съдържание за развитието и стимулирането на талантиливи ученици в европейските училища.

Основните продукти, резултат от дейностите на проекта са:

- Европейско учебно помагало с методи и инструменти за откриване, мотивиране и подкрепа на талантиливи ученици по математика (Кендеров & Гроздев, 2006).
- Информационна програма за правителства, университети и фондации.
- Подготвителен курс за преподаватели от началното и средното училище във връзка с откриването и развитието на талантиливи ученици по математика.

Специалистите по издирване и работа с деца с изяви математически способности от осемте европейски държави, взели участие в проекта MATHEU, предлагат идентификационни процедури за две възрастови групи – за ученици от 9 до 14 години и за такива от 15 до 18 години. Основното средство за идентификация, което те ползват са дидактическите стълби от задачи по определени теми. Под стълба се разбира система от задачи с нарастваща трудност. Когато един ученик решава последователните задачи от стълбата, той се изкачва стъпало по стъпало и постепенно навлиза в съответната тематика. Всяко преодоляно стъпало му донася удовлетворение и го зарежда с желание да върви нагоре. В същото време, невъзможността да продължи по стълбата го мотивира за допълнителни занимания по темата, включително и с помощта на преподавател, както и за проучване на допълнителна литература за придобиване на съответни знания и умения, които да му помогнат да се върне към стълбата и да продължи успешното ѝ изкачване.

От друга страна, добре известен е ежегодният Национален конкурс “Издирване на таланти Ум+”, който се провежда вече 20 години от сп. “Математика плюс”. Целите на конкурса са идентични с тези на европейския проект MATHEU с рестрикция за България. Близко 800-те задачи, предлагани на участниците в 20-те годишни цикъла на системата за откриване и развитие на математически таланти “Ум+” са оригинални и са изготвени специално за целите на идентификационния процес. Някои от тях са с една и съща тематика, като същевременно варират силно по трудност и други показатели. Това ги прави особено подходящи за групиране в дидактически стълби, подпомагащи както бъдеща идентификация на математически таланти, така и всяка друга извънкласна работа по математика. В настоящата статия се предлагат две такива стълби на базата на задачите от конкурса “Издирване на таланти Ум+”.

Стълба 1. Числови ребуси. Темата е широко застъпена и много популярна както в извънкласната работа по математика, така и на най-различни математически състезания от регионален, национален и международен мащаб. В скоби за всяка задача са посочени годината на съответния цикъл от Ум+, класа, за който е давана задачата, както и нейната трудност, определена като частно в проценти на средния резултат на всички участници върху максималния резултат (бал) на задачата. Стълба 1 е предназначена за ученици от 5 клас.

Задача 1. (2000, 4, 94,8%) Катя си намислила едноцифрено число **Н** и съставила ребуса **Н.Н.Н = ПАН**. Намерете числото, което е намислила Катя.

Решение: Просто проверяваме всички възможности за цифрата **Н**. Получават се решенията $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ и $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. Участниците, които бяха получили непълен брой точки, обикновено бяха пропуснали някое от решенията.

Задача 2. (2007, 4, 92,7%) Да се реши ребусът **АБВГ + БВГ + БГ + Г = 2008**.

Решение: Единствената възможна стойност на **А** е 1. Можем да запишем ребуса във вида **БВГ + БВГ + БГ + Г = 1008**. Ако сега $B \geq 5$, то $БВГ + БВГ \geq 520 + 520 > 1008$, което е невъзможно. Ако пък $B \leq 3$, то **БВГ + БВГ + БГ + Г < 1000** и също е невъзможно. Следователно **Б = 4**. Оттук без затруднение намираме единственото решение на ребуса, а именно **1482 + 482 + 42 + 2 = 2008**.

Задача 3. (2001, 4, 90,7%) Решете ребусите:

а) **А + АБ + АВВ + АБВГ = 2001**

б) **А + АБ + АВВ + АБВГ = 2002**

Решение: Аналогично на предишната задача. Получават се решенията:

$$1 + 18 + 180 + 1802 = 2001 \text{ и } 1 + 18 + 180 + 1802 = 2002.$$

Задача 4. (2002, 4, 90,2%) Решете ребусите:

а) **ААВБ – АВБ – АВ – А = 2001;**

б) **ААВБ – АВБ – АВ – А = 2002;**

в) **ААГБ – АВБ – АВ – А = 2003,**

като на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви – различни цифри.

Решение: а) Понеже **ААВБ – 2001 < 1000**, то **А = 3** или **А = 2**. Ако **А = 3**, то

$$\mathbf{ААВБ - АВБ - АВ - А > 2500}$$

и решение няма да се получи. Ето защо **А = 2**. След разглеждане на цифрата на единиците веднага получаваме, че **В = 7**, а стойността на **Б** можем да определим с няколко проверки. Получаваме единствено решение на ребуса, а именно:

$$2274 - 247 - 24 - 2 = 2001.$$

Аналогично решаваме и другите два ребуса. В б) получаваме единственото решение **2263 – 236 – 23 – 2 = 2002**, а във в) се получават петте решения:

$$2230 - 205 - 20 - 2 = 2003; 2241 - 215 - 21 - 2 = 2003;$$

$$2263 - 235 - 23 - 2 = 2003; 2274 - 245 - 24 - 2 = 2003 \text{ и } 2296 - 265 - 26 - 2 = 2003.$$

Задача 5. (2004, 4, 88,1%) Решете ребуса:

$$\mathbf{ДРА + КОН + ЗМЕЙ = 2003 + 2004 + 2005.}$$

Решение: Ребусът има 1800 решения – обстоятелство, което е убягнало на автора

му при съставянето на задачата. При проверката на решенията журито оценяваше две неща – дали участникът е привел поне едно правилно решение на ребуса и дали е отбелязал, че от едно намерено решение на ребуса се получават и други чрез разместване съответно в цифрите на единиците, десетиците и стотиците. Някои решения на ребуса са например

$$126 + 837 + 5049 = 6012; 294 + 637 + 5081 = 6012; 570 + 613 + 4829 = 6012 \text{ и т.н.}$$

Задача 6. (1996, 5, 82,9%) Възстановете умножението $\overline{abcde} = \overline{ee} \cdot \overline{eaa}$. На всяка буква отговаря цифра. На различните букви отговарят различни цифри, а на еднаквите – еднакви цифри.

Решение: От основно значение е стойността на цифрата „e“. Ако $e \leq 2$, то произведението вдясно не може да бъде петцифрено. След това да забележим, че произведението $e \cdot a$ трябва да завършва на a . Ако $e = 3; 7$ или 9 , единствената възможност е $a = 1$. От трите случая получаваме едно решение $33 \cdot 311 = 10263$. Ако $e = 4; 6$ или 8 , то $a = 1$ или $a = 6$. Шестте проверки показват, че не се получава друго решение на ребуса. Накрая, ако $e = 5$, произведението вдясно се намира по големина между $55 \cdot 500 = 27500$ и $55 \cdot 599 = 32945$, а това означава, че $a = 2$ или $a = 3$. И в двата случая не се получава ново решение на ребуса.

Задача 7. (1993, 4, 79,3%) На мястото на звездичките поставете цифрите от 0 до 9, като всяка се използва по веднъж така, че да се получи вярно изваждане и умалението да е най-голямо.

$$\begin{array}{r} \text{****} \\ - \\ \text{****} \\ \hline \text{**} \end{array}$$

Решение: Ще приведем решението на един от участниците в Ум+ Момчил Русинов от София. Понеже всички цифри са различни, можем да използваме буквени означения и да запишем равенството във вида $abcd - efgh = ij$. За да бъде разликата двуцифрено число, необходимо е да бъдат изпълнени равенствата $a = e + 1$ и $10 + b - 1 = f$. Но тъй като b и f са цифри, то това е възможно само ако $b = 0$ и $f = 9$. Ребусът ще изглежда така: $a0cd - e9gh = ij$. Тъй като търсим най-голямо умалено, а 8 е най-голямата неизползвана цифра, първият вариант е $a = 8$, $e = 7$ и тогава ребусът приема вида $80cd - 79gh = ij$. За ос-

таналите цифри са налице следните две възможности: $d - h = j$, $10 + c - g = i$ или $10 + d - h = j$, $9 + c - g = i$, като и в двата случая $g > c$. Разглеждайки всички възможности за цифрите c, d, g, h, i и j , виждаме, че решение на ребуса не се получава. Аналогично отхвърляме и възможността $a = 7$, $e = 6$. При $a = 6$, $e = 5$ се получават 8 решения на ребуса, отговарящи на условието на задачата. При това максималната стойност на умаляемото е 6021. Едно от тези решения е например $6021 - 5984 = 37$.

Задача 8. (1997, 5, 77,1%) Да се възстанови умножението:

$$\begin{array}{r}
 ** \cdot *** \\
 \hline
 *** \\
 8* \\
 *** \\
 \hline
 62*7*
 \end{array}$$

Решение: Първата цифра в третото произведение със сигурност е 6, следователно неизвестният двуцифрен множител ще е най-малко $600 : 9 > 66$. Но този неизвестен двуцифрен множител има кратно, което е двуцифрено число и започва с 8 (съгласно второто произведение), а това е възможно само ако средната цифра на трицифрения множител е 1, а двуцифреният множител има вида $8*$. От неравенствата $6 < \frac{600}{89}$ и $\frac{629}{80} < 8$ следва, че цифрата на стотиците на трицифрения множител със сигурност е 7. Ребусът приема вида:

$$\begin{array}{r}
 8* \cdot 71* \\
 \hline
 *** \\
 8* \\
 *** \\
 \hline
 62*7*
 \end{array}$$

Понеже $\frac{600}{7} > 85$, то двуцифреният множител ще е някое от числата 86, 87, 88 или 89. Ако двуцифреният множител е 86, то ребусът ще приеме вида:

$$86 \cdot 71^*$$

$$\begin{array}{r} \text{---} \\ *** \\ 86 \\ 602 \\ \text{---} \\ 62 \cdot 7^* \end{array}$$

Този вариант е невъзможен, защото от събирането $* + 8 + 2$ не можем да получим пренос 2 към следващия разред. Ако двуцифреният множител е 87, то достигахме до следното решение на ребуса:

$$\begin{array}{r} 87 \cdot 717 \\ \text{---} \\ 609 \\ 87 \\ 609 \\ \text{---} \\ 62379 \end{array}$$

От другите два варианта не се получава решение на ребуса. Следователно намереното решение е единствено.

Задача 9. (2002, 4, 75%) Разшифровайте ребуса

$$\text{ОБОРОТ} + \text{ОБОРОТ} = \text{КОЛЕЛО},$$

ако на еднакви букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви – различни цифри.

Решение: Тук прилагаме “стандартната тактика” при решаването на ребуси, а именно да определим стойностите на цифрите с най-голяма повтораемост. В случая това е **О**. От разреда на единиците получаваме, че **О** е четна цифра, а понеже $\text{ОБОРОТ} < 500000$, то **О** = 2 или **О** = 4. Тогава в разредите, в които участва **О**, няма да има пренос. Ще разгледаме последователно двата случая. Ако **О** = 2, то **Т** = 1, **Б** = 6 или обратното. В случая **Т** = 1, **Б** = 6 последователно намираме **Л** = 4, **К** = 5, но тогава няма подходяща цифра за **Р**. А ако **Т** = 6, **Б** = 1, то както по-горе имаме **Л** = 5, **К** = 4. За да имаме подходящ пренос, трябва **Р** да е поне 5 и лесно проверяваме, че единствено **Р** = 9, **Е** = 8 ни води до решението $212926 + 212926 = 425852$. В случая **О** = 4 провеждаме аналогични разсъждения и достигахме до решенията:

$$424547 + 424547 = 849094 \text{ и } 474342 + 474342 = 948684.$$

Задача 10. (1994, 4, 72,4%) В означеното действие събиране на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви – различни цифри. Възстановете действието.

$$\begin{array}{r} \text{АТАКА} \\ + \text{УДАР} \\ \text{УДАР} \\ \hline \end{array}$$

НОКАУТ

Решение: Ако $A \leq 7$, то

$$\text{АТАКА} + \text{УДАР} + \text{УДАР} < 80000 + 10000 + 10000 = 100000$$

и резултатът от събирането в ребуса не може да е шестцифрен. Освен това

$$\text{АТАКА} + \text{УДАР} + \text{УДАР} < 99999 + 9999 + 9999 < 120000,$$

а това означава, че единственият вариант за решение е $\mathbf{H = 1, O = 0}$. От разряда на стотиците имаме, че $\mathbf{A + D + D}$ (евентуален пренос) трябва да завършва на $\mathbf{A}$, а това е невъзможно, ако този пренос е 1 (от съображения за четност). Този пренос не може и да липсва, защото в разряда на десетиците имаме две $\mathbf{A}$ -та. Следователно преносът към разряда на стотиците трябва задължително да е 2. Оттук получаваме, че $\mathbf{D = 4}$ или $\mathbf{D = 9}$. Ако $\mathbf{D = 9}$, трябва задължително $\mathbf{A = 8}$. Но тогава сумата $\mathbf{T + Y + Y + 2}$ е най-много 22, тоест $\mathbf{K = 2}$, но тогава от разряда на десетиците не можем да получим желанния пренос 2 към следващия разред. Остава $\mathbf{D = 4}$. Ако $\mathbf{A = 8}$, то $\mathbf{T}$ е четна цифра. За да може тогава $\mathbf{T + Y + Y > 20}$, задължително е $\mathbf{Y = 9}$. Лесно проверяваме тогава, че останалите две четни цифри 2 и 6 за $\mathbf{T}$ не дават подходящи стойности за $\mathbf{P}$ и $\mathbf{K}$. Остава налице единствената възможност $\mathbf{D = 4, A = 9}$. В този случай $\mathbf{T}$ е нечетно, а $\mathbf{K}$ е четно. След разглеждането на останалите възможности за тези две цифри достигахме до единственото решение $\mathbf{93989 + 7492 + 7492 = 108973}$.

Задача 11. (1995, 5, 66,8%) На мястото на звездичките в умножението $1995 \cdot *** = *****$ да се поставят цифрите от 0 до 9, като всяка се използва точно по веднъж, така че да се получи вярно числово равенство. Да се намерят всички такива числа.

Решение: Понеже $1995 \cdot *** < 1995 \cdot 1000 < 2000000$, то първата цифра на седемцифрения множител със сигурност е 1. Освен това, понеже $1995 \cdot 500 < 1000000$, то първата цифра на трицифрения множител е 5, 6, 7, 8 или 9. Да отбележим също така, че понеже 1995 се дели на три, то на три се дели и числото “*****”. Но сборът на цифрите от 0 до 9 е 45 и се дели на три, откъдето получаваме, че и числото “****” се дели на три. Но тогава същото разсъждение дава, че и двете числа “****”

и “*****” се делят на 9. Следователно търсеният трицифрен множител е някое от числата от 504 до 981, кратни на 9 и с различни цифри. От тези числа трябва да премахнем 504, 540, 630, 702, 720, 810, защото ще има повторение на цифрата 0. Също така, отстраняваме числата 513, 531, 549, 567, 657, 675, 765, 945, защото ще имаме повторение на цифрата 5. Остават общо 28 възможни стойности за трицифрения множител. Най-простия начин е да проверим всички тези стойности чрез умножение. Ще получим, че единственото решение на ребуса е $1995 \cdot 639 = 1274805$.

Задача 12. (2002, 6, 58,4%) Да се намерят пет различни цифри a, b, c, d и e така, че да е вярно равенството $\overline{abcde} - \overline{abc} \cdot \overline{de} = 2003$.

Решение: Нека $x = \overline{abc}$, $y = \overline{de}$. Можем да запишем ребуса във вида $100 \cdot x + y - x \cdot y = 2003$ или още във вида $x \cdot (100 - y) = 2003 - y$, а оттук $x \cdot (100 - y) = 100 - y + 1903$. От последния запис става ясно, че числото $100 - y$ е делител (едноцифрен или двуцифрен) на числото 1903. Такива делители са 1 и 11. Ако $100 - y = 1$ ще следва, че $\overline{de} = 99$ – невъзможно. От другата възможност достигахме до единственото решение на ребуса, а именно $17489 - 174 \cdot 89 = 2003$.

Задача 13. (2005, 4, 53,9%) Да се реши числовият ребус, ако на еднаквите букви отговарят еднакви цифри и на различните букви отговарят различни цифри:

НОВИНИ + СТАТИИ = ВЕСТНИК.

Решение: Ясно е, че единствената възможна стойност на **В** е **В = 1**. От разряда на десетиците получаваме, че **Н = 0** или **Н = 9**. Понеже **Н** е начална цифра в **НОВИНИ**, то на тази буква не може да съответства 0. Значи **Н = 9**, като при това оттук $I \geq 5$. Да разгледаме последователно възможните стойности на **И**, а именно 5, 6, 7 и 8. Нека **И = 5**. Получаваме последователно **К = 0**, **Т = 3** и **А = 2**. Остават буквите **О**, **С**, **Е**, както и неизползваните цифри 4, 6, 7 и 8. Стойността на **О** определя еднозначно стойностите на другите букви. Единственият вариант на решение, до който достигахме, е равенството $941595 + 732355 = 1673950$. При останалите стойности на **И** лесно получаваме различни противоречия: при **И = 6** имаме **К = Т = 2**, което е невъзможно, при **И = 7** имаме **Т = В = 1**, което отново е невъзможно и при **И = 8** достигахме до **А = Н = 9**, което също е невъзможно. Следователно ребусът има единствено решение.

Задача 14. (2007, 4, 51,6%) В равенството $\overline{abcd} + 2007 = \overline{efgh}$ на буквите a, b, c, d, e, f, g, h отговарят различни цифри. Да се намери най-голямата възможна стойност на числото $\overline{efgh}$.

Решение: И в разреда на десетиците, и в разреда на стотиците някаква цифра, събрана с нула, трябва да дава друга цифра. Това е възможно само ако от предишния разред имаме пренос, който може да бъде само 1. Оттук следва, че $c = 9$, $g = 0$ и $d \geq 4$. Тъй като търсим най-голямата възможна стойност на сбора, следва да проверим възможно ли е равенството $e = 8$. Ясно е тогава, че $a = 6$. От разреда на стотиците имаме, че $f = b + 1$ и f трябва да е възможно най-голямо. Очевидно $f \neq 9$; $f \neq 8$ и ако $f = 7 \Rightarrow b = 6 = a$, което е невъзможно. Също така $f \neq 6$ заради $a = 6$. Ако $f = 5 \Rightarrow b = 4$, което обаче е невъзможно заради $d \geq 4$. Остава $f = 4 \Rightarrow b = 3$ и оттук лесно проверяваме, че равенството $6395 + 2007 = 8402$ отговаря на условието на задачата.

Задача 15. (2007, 4, 48%) Да се реши числовият ребус:

$$\text{ПАКЕТИ} + \text{ПАКЕТИ} = \text{КУРИЕР}.$$

На различните букви отговарят различни цифри, а на еднаквите букви – еднакви цифри.

Решение: Да започнем с наблюдението, че цифрата **Р** е четна. Това следва от факта, че сборът **И + И** трябва да завършва на **Р**. Оттук получаваме, че за да може сборът **К + К** също да завършва на **Р**, трябва от разреда на стотиците към разреда на хилядите да няма пренос (иначе ще получим нечетния сбор **К + К + 1**) и освен това цифрите **И** и **К** трябва да се различават точно с 5. В частност, това ни дава, че $E < 5$. Лесно отхвърляме възможността $P = 0$ – двете цифри **И** и **К**, чиито удвоени сборове трябва да завършват на нула, трябва да са 0 и 5, докато вече $P=0$. Значи за **Р** остават четири възможности, които ще разгледаме последователно.

Случай 1. $P = 2$. Тогава $K = 1$, $I = 6$ или $K = 6$, $I = 1$. Ако обаче $K = 1$, то цифрата **П** няма подходяща стойност – невъзможно. Затова трябва $K = 6$, $I = 1$. Но тогава трябва $\Pi = 3$ и за да може събирането в разреда на стотиците да завършва на 1, задължително трябва $E = 0$ и от предишния разред да имаме пренос 1 (другата възможност за **Е**, а именно $E = 6$, се отхвърля заради неравенството $E < 5$). Това означава, че задължително трябва $T = 5$. Цифрите **А** и **У** определяме измежду останалите неизползвани цифри от 0 до 9 и то така, че сборът $A + A + 1$ да завършва на **У**. Лесно се убеждаваме, че единствената възможност е $A = 4$, $U = 9$. В този случай получаваме единствено решение на ребуса и то е $346051 + 346051 = 692102$.

Случай 2. $P = 4$. Тогава $I = 2$, $K = 7$ или $I = 7$, $K = 2$. Ако $I = 2$, $K = 7$, то трябва $\Pi = 3$, като при това $A \geq 5$. За да можем да получим събирането в разреда на стотиците, е задължително $E = 1$, като при това трябва да има пренос от разреда на десетиците. Не е възможно обаче **Е** да е нечетна цифра, защото в разреда на десетиците няма как сборът $T + T$ да завършва на **Е** (нямаме пренос от разреда

на единиците). Ако $\mathbf{H} = 7$ и $\mathbf{K} = 2$, получаваме, че $\mathbf{H} = 1$, от разряда на стотиците – че $\mathbf{E} = 1$ и $\mathbf{T} > 5$ и тогава трябва $\mathbf{T} = 6$. Понеже $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ трябва да завършва на $\mathbf{Y}$, правим извода, че $\mathbf{Y}$ е четна цифра и понеже 2;4 и 6 вече са използвани, то или $\mathbf{Y} = 0$ или $\mathbf{Y} = 8$. И в двата случая обаче решение на ребуса няма да получим, понеже няма подходяща стойност за $\mathbf{A}$.

Случай 3. $\mathbf{P} = 6$. Тогава $\mathbf{H} = 3$, $\mathbf{K} = 8$ или $\mathbf{H} = 8$, $\mathbf{K} = 3$. Ако е налице първата възможност, то от разряда на стотиците получаваме, че единствената възможност за $\mathbf{E}$ е $\mathbf{E} = 1$. Но тогава няма как $\mathbf{T} + \mathbf{T}$ да завършва на $\mathbf{E}$. Ако е налице втората възможност, то аналогично получаваме, че единствената възможна стойност за $\mathbf{E}$ е $\mathbf{E} = 4$. Тогава, понеже имаме пренос от единиците към десетиците, е невъзможно $\mathbf{T} + \mathbf{T} + 1$ да завършва на $\mathbf{E}$.

Случай 4. $\mathbf{P} = 8$. Отново имаме две възможности – или $\mathbf{H} = 4$, $\mathbf{K} = 9$, или $\mathbf{H} = 9$, $\mathbf{K} = 4$. Ако е налице първата възможност, то $\mathbf{H}$ може да бъде само 4, но вече $\mathbf{H} = 4$ и ребусът няма решение. А ако е налице втората възможност, то от разряда на стотиците получаваме, че е възможно само $\mathbf{E} = 4$. Но тогава вече $\mathbf{K} = 4$ и ребусът отново няма решение.

Окончателно получихме, че ребусът има единствено решение, а именно:

$$346051 + 346051 = 692102.$$

Задача 16. (1996, 5, 42,5%) Възстановете събирането:

$$\mathbf{ПОСОКИ} + \mathbf{ПОСОКИ} + \mathbf{ПОСОКИ} + \mathbf{ПОСОКИ} = \mathbf{КОМПАС},$$

като на една и съща буква съответства една и съща цифра, а на различните букви – различни цифри.

Решение: Да наречем разредите в събирането първи, втори,..., шести, започвайки отляво надясно. Да забележим, че най-големият възможен пренос от един разред към следващия е 3. Тогава във втория разред се получава, че $4 \cdot \mathbf{O} +$ (евентуален пренос) завършва пак на $\mathbf{O}$. Проверката показва, че това е възможно само когато $\mathbf{O}$ отговаря на някоя от цифрите 0, 3, 6 или 9. От първия разред имаме, че $4 \cdot \mathbf{P} +$ (евентуален пренос) < 10 . Следователно $\mathbf{P} = 1$ или $\mathbf{P} = 2$. Ще разгледаме последователно възможностите за цифрата $\mathbf{O}$.

I случай. $\mathbf{O} = 0$. От $\mathbf{P} = 1$ или 2 следва, че $\mathbf{K} = 4$ или $\mathbf{K} = 8$. Нека $\mathbf{K} = 4$. Тогава $\mathbf{P} = 1$. От третия разред към втория не трябва да има пренос. Затова за $\mathbf{C}$ остава единствената възможност $\mathbf{C} = 2$. Тогава от 4 . $\mathbf{C} = \mathbf{M}$ получаваме $\mathbf{M} = 8$. От шестия разред имаме, че 4 . $\mathbf{H}$ завършва на 2, а това е възможно ако $\mathbf{H}$ съответства на 3 или 8. Понеже вече $\mathbf{M} = 8$, остава $\mathbf{H} = 3$. Тогава $\mathbf{A} = 7$. Получаваме решението

$$102043 + 102043 + 102043 + 102043 = 408172.$$

Нека сега $\mathbf{K} = 8$. Тогава от 4 . $\mathbf{H} = 8$ получаваме $\mathbf{H} = 2$. От петия към четвъртия

разред преносът трябва да е 2, а в действителност $4 \cdot 8$ дава пренос 3, което е противоречие и друго решение на ребуса не се получава.

II случай. $\mathbf{O} = 3$. Във втория разред трябва да има пренос 1, за да може $4 \cdot 3 + 1$ да завършва на 3. Тогава за **С** има единствена възможност **С** = 4. От шестия разред имаме, че $4 \cdot \hat{E}$ завършва на 4 и следователно **И** = 1 или **И** = 6. Ако **И** = 1, то за **П** има единствена възможност **П** = 2, защото в противен случай една и съща цифра ще съответства на различни букви. Тогава от първия разред $\hat{E} = 4 \cdot 2 + \hat{i} \hat{o} \hat{a} \hat{i} \hat{n} 1 = 9$, а от петия разред към четвъртия имаме пренос 3, откъдето **П** = 5, а това е невъзможно. А ако **И** = 6, то **П** = 1 или **П** = 2. При **П** = 1, **К** = 5, но от четвъртия разред следва, че **П** = 4, което е пак невъзможно. При **П** = 2, **К** = 9, но от четвъртия разред получаваме **П** = 5, което отново е невъзможно.

Аналогично разглеждаме и случаите **О** = 6 и **О** = 9. При тях не получаваме други решения на ребуса. Следователно той има единствено решение, което намерихме по-горе.

Задача 17. (1995, 4, 32,7%) Много от участниците във фестивала “УМ+” през лятото на 1995 г. в гр. Сопот подариха на д-р М. Плюс букети цветя. В тази задача от вас се иска да намерите броя на цветята в букетите. Той се задава с всички възможни стойности на числото n , за което ребусът $n \cdot \mathbf{ЦВЕТЕ} = \mathbf{БУКЕТ}$ има решение. За така намерените стойности на n посочете всички решения на ребуса. Дайте обяснения!

Решение: Очевидно $2 \leq n \leq 9$. Ключовото наблюдение в решението е в последните две цифри на числата **ЦВЕТЕ** и **БУКЕТ**. Да разгледаме например случая $n = 2$:

Ако **Е** = 0, то **Т** = 0, което е невъзможно, защото **Е** = **Т**.

Ако **Е** = 1, то **Т** = 2, но тогава $2 \cdot T$ не завършва на **Е**.

Ако **Е** = 2, то **Т** = 4, но тогава $2 \cdot T$ не завършва на **Е**.

Ако **Е** = 3, то **Т** = 6, но тогава $2 \cdot T$ не завършва на **Е**.

Ако **Е** = 4, то **Т** = 8, но тогава $2 \cdot T$ не завършва на **Е**.

Ако **Е** = 5, то **Т** = 0, но тогава $2 \cdot T + 1$ не завършва на **Е**.

Ако **Е** = 6, то **Т** = 2, но тогава $2 \cdot T + 1$ не завършва на **Е**.

Ако **Е** = 7, то **Т** = 4, но тогава $2 \cdot T + 1$ не завършва на **Е**.

Ако **Е** = 8, то **Т** = 6, но тогава $2 \cdot T + 1$ не завършва на **Е**.

Ако **Е** = 9, то **Т** = 8, но тогава $2 \cdot T + 1$ не завършва на **Е**.

Следователно при $n = 2$ ребусът няма решение. Аналогично разглеждаме

останалите стойности на n . В таблицата са показани стойностите на n , както и стойностите на **Е** и **Т**, при които проверката на умножението в последните два разряда не води до противоречие:

n	Е	Т
4	2	8
5	9	5
6	9	4
7	7	9
8	8	4
9	1	9

Следователно остана да разгледаме точно тези случаи. При $n = 4$ получаваме **К** = 1, но тогава **Ц** ≥ 3 , което е невъзможно, защото $4 \cdot ЦВЕТЕ > 100000$. При $n = 6$ имаме **К** = 6 и **Ц** = 1, но тогава която и от оставащите цифри да изберем за **В**, се получават съвпадения с вече намерени цифри за някоя от буквите **Б** или **У**. Аналогично и при $n = 7, 8$ и 9 не се получава решение на ребуса.

При $n = 5$ ребусът има решение: $5 \cdot 12959 = 64795$. Макар че това не се иска в условието на задачата, сравнително лесно може да се покаже, че при $n = 5$ ребусът има точно още едно решение, а именно $5 \cdot 16959 = 84795$.

Задача 18. (2006, 4, 27,1%) Да се реши числовият ребус, в който на различните букви отговарят различни цифри, а на еднаквите букви - еднакви цифри:

$$\text{ПИТИЕТА} + \text{ПИТИЕТА} + \text{ПИТИЕТА} = \text{КОКТЕЙЛ}$$

Решение: Ще започнем с наблюдението, че от всеки разред към следващия може да има пренос 0, 1 или 2. Да разгледаме събирането в разряда на стотиците. Имаме **Е** + **Е** + **Е** + (евентуален пренос от разряда на десетиците) = число, завършващо на **Е**. Ако преносът от десетиците към стотиците е 0, проверката показва, че това е възможно, ако **Е** = 0 или **Е** = 5. Ако разглежданият пренос е 1, то няма подходяща цифра за буквата **Е**, а ако преносът е 2, то **Е** = 4 или **Е** = 9. Получаваме, че за цифрата, отговаряща на буквата **Е**, има точно 4 възможности, които ще разгледаме последователно.

1) **Е** = 0. Тогава преносът от десетиците към стотиците е 0, а това означава, че **Т** ≤ 3 . Ако **Т** = 1, то трябва **И** + **И** + **И** да завършва на **Т**, което е възможно само ако **И** = 7. Тогава от разряда на десето хилядите намираме, че **К** = 1, което е невъзможно (**К** = **Т**). Със сходни разсъждения в останалите случаи за **Т** установяваме, че:

При **Т** = 2 следва **И** = 4, **К** = 7 и **П** = 2 – невъзможно;

При $T = 3$ следва $I = 1$, $K = 9$ и $P = 3$ – невъзможно.

1) $E = 5$. Тогава преносът от десетиците към стотиците е 0, и пак $T \leq 3$.

Ако сега $T = 0$, то трябва $I + I + I + 1$ да завършва на $T = 0$, а това е възможно единствено ако $I = 3$. Но отгук следва, че $K = 1$, което е невъзможно. Отново в този случай провеждаме сходни разсъждения, за да установим, че:

При $T = 1$ следва $I = 0$, $K = 3$ и $P = 1$ – невъзможно;

При $T = 2$ следва $I = 7$, $K = 8$ и $P = 2$ – невъзможно;

При $T = 3$ следва $I = 4$, $K = 0$ – невъзможно.

1) $E = 4$. Тогава преносът от десетиците към стотиците е 2, а това означава, че $T \geq 6$.

Ако $T = 6$, то трябва $I + I + I + 1$ да завършва на $T = 6$, а това е възможно само когато $I = 5$, откъдето $K = 6$ и $O = 6$ – невъзможно. По същия начин:

При $T = 7$ следва $I = 2$ и $K = 1$ – невъзможно;

При $T = 8$ следва $I = 9$, $K = 6$ и $O = 9$ – невъзможно.

Нека сега $T = 9$. Със същите разсъждения последователно получаваме $I = 6$ и $K = 8$. Значи $O = 0$, което ни води до $P = 2$ и до тук няма противоречия. Остана да определим цифрите, отговарящи на буквите A , Y и L . Понеже цифрите 8 и 9 вече съответстват на някакви букви, то от разряда на десетиците за Y имаме единствена възможност $Y = 7$. Това ни води до $A \leq 3$ и лесно се убеждаваме, че единствената възможност е $A = 1$ и тогава $L = 3$. Достигахме до решението $2696491 + 2696491 + 2696491 = 8089473$.

2) $E = 9$. Тогава преносът от десетиците към стотиците е 2, и пак $T \geq 6$.

Ако $T = 6$, трябва $I + I + I + 2$ да завършва на $T = 6$, откъдето $I = 8$. Но тогава следва, че $K = 0$, което е невъзможно. В останалите случаи за T по същия начин получаваме:

При $T = 7$ следва $I = 5$ и $K = 2$ – невъзможно;

При $T = 8$ следва $I = 2$, $K = 4$ и $O = 8$ – невъзможно;

При $T = 9$ следва $I = 9$ – невъзможно.

Следователно ребусът има единствено решение, което намерихме по-горе.

Задача 19. (1997, 5, 26,9%) Да се реши числовият ребус:

$$\text{ДОМАТИ} + \text{ОЛИО} + \text{ОЦЕТ} = \text{САЛАТА}.$$

Решение: От всеки разред към следващия има пренос най-много 2. Това ни дава, че O е поне 8, защото в противен случай от разряда на десетохилядите към стохилядите не може да има пренос и ще излезе, че $D = C$. Ще разгледаме последователно двата случая за O .

Първи случай: $O = 8$. Тогава $A = 0$ и от разряда на единиците получаваме, че $I + T = 2$. Това е невъзможно, защото нулата е вече използвана, или $I + T = 12$. От разряда на десетиците следва тогава, че $14 + E$ трябва да завършва на T . Като разгледаме всички възможности за цифрата T , отчитайки вече намерените цифри, виждаме, че се получават три възможни варианта:

Случай 1.1: $T = 9, I = 3, E = 5$. Тогава $L + C = 9$ и единствената възможност да избегнем повтарянето на една цифра за различни букви е едната от тези две цифри да 2, а другата да е 7. И в двата случая обаче се оказва невъзможно да подберем M така, че в разряда на хилядите $M + O + O + \text{пренос } 1$ да завършва на L . Решение не се получава.

Случай 1.2: $T = 7, I = 5, E = 3$. Отново $L + C = 9$, но сега обаче се оказва невъзможно да се подберат L и C така, че да са различни от вече намерените цифри.

Случай 1.3: $T = 5, I = 7, E = 1$. Сега пак $L + C = 9$, като това е възможно само ако двойката букви L, C отговарят на двойката цифри $3, 6$. Единствената възможност за решение се получава, ако $C = 3, L = 6$ и $M = 9$. Но тогава останалите цифри, които трябва да отговарят на буквите D и S , са 2 и 4, а те не са съседни.

Тези разсъждения привършват първия случай с извода, че решение на ребуса не се получава. След подобни разсъждения и във втория случай достигаме до крайния отговор, а именно, че ребусът има единственото решение:

$$593148 + 9289 + 9704 = 612141.$$

Задача 20. (2007, 5, 26,4%) Да се намерят всички естествени числа n , за които при записването на числата $5n$ и $11n$ са необходими общо девет цифри и всяка от цифрите от 1 до 9 се използва точно по веднъж.

Решение: Тъй като $5n < 11n$, то числото $5n$ е най-много четирицифрено, а числото $11n$ е най-малко петцифрено. Ако $5n < 1000 \Rightarrow n < 200$ и тогава $11n < 10000$, т.е. за записа на $5n$ и $11n$ ще са необходими общо по-малко от 9 цифри. Следователно единствената възможност да е изпълнено исканото в задачата е $5n$ да е четирицифрено, а $11n$ да е петцифрено. Можем да запишем, че $5n = abcd$ и $11n = efghi$, където $a, b, c, \dots, i$ отговарят на цифрите от 1 до 9. От първото от двете равенства получаваме $55n = 11 \cdot abcd$, а от второто имаме $55n = 5 \cdot efghi$. Следователно $11 \cdot abcd = 5 \cdot efghi$ и оттук нататък ще работим основно с този запис. Тъй като $abcd < 10000$, то $11 \cdot abcd < 110000 \Rightarrow efghi < 22000$. Това означава, че $e = 1$ или $e = 2$. Освен това е ясно, че $abcd$ трябва да се дели на 5, откъдето $d = 5$. Да отбележим по-нататък, че сборът $abcd + efghi$ при деление на 9 дава същия остатък, какъвто дава и сборът $a + b + c + \dots + i = 45$, т.е. $abcd + efghi$ ще се дели на 9. Но тогава и $5(abcd + efghi) = 5abcd + 5efghi = 5abcd + 11abcd = 16abcd$ ще се дели на 9, което предполага, че

и $abcd$ и $efghi$ ще се делят на 9. Налице са неравенствата $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \leq e + f + g + h + i \leq 35 = 9 + 8 + 7 + 6 + 5$ и понеже $e + f + g + h + i$ е кратно на 9, то имаме два случая, които ще разгледаме последователно.

Случай I. $e + f + g + h + i = 27$. Тогава $a + b + c + d = 45 - 27 = 18$. Според признака за делимост на 11 единият от сборовете $e + g + i$, $f + h$ се различава от другия с кратно на 11 и тъй като в случая сумата на двата сбора е 27 (нечетно число), то единият от тях трябва да е по-голям от другия точно с 11. Или ако по-малката от двете суми $e + g + i$, $f + h$ е S , то другата ще е $S + 11$, откъдето $S + S + 11 = 27 \Rightarrow S = 8$, а $S + 11 = 19$. Очевидно не е възможно $f + h = 19$ ($f + h \leq 9 + 8 = 17$), откъдето единствената възможност е $f + h = 8$, $e + g + i = 19$. Понеже $e \leq 2$ и $g + i \leq 17$, то равенството $e + g + i = 19$ е възможно точно тогава, когато $e = 2$, а g и i са 8 и 9 (или обратното). Понеже i е нечетна цифра, то трябва $g = 8$, $i = 9$. Тъй като освен това $e = 2$ и $efghi < 22000$, то задължително е $f = 1$ и тогава $h = 7$. Остана да проверим само дали числото 21879 ще доведе до изпълнение на равенството $11 \cdot abcd = 5 \cdot efghi$. Получаваме $5 \cdot 21879 = 109395$ и $109395 : 11 = 9945$, което не води до решение на задачата – имаме повторение на цифрата 9.

Случай II. $e + f + g + h + i = 18$ и тогава $a + b + c + d = 27$. Но вече сме намерили, че $d = 5$, откъдето трябва $a + b + c = 22$. Има само две представяния на числото 22 като сума на три различни цифри, а именно $22 = 9 + 8 + 5$ и $22 = 9 + 7 + 6$. Първото от тях не върши работа, заради $d = 5$. От второто равенство следва, че числото $abcd$ може да е някое от числата 9765, 9675; 7965, 7695, 6975 и 6795. Като проверим дали за тези числа са изпълнени всички изисквания за равенството $11 \cdot abcd = 5 \cdot efghi$, се убеждаваме, че само 9765 води до решение на задачата. В този случай $efghi = 21483$ и $n = 1953$.

Задача 21. (1995, 5, 26,1%) Да се намерят всички решения на числовия ребус
ЕДНО + ДВЕ + ДЕВЕТ = ПЕТ + СЕДЕМ,

ако е известно, че числото **ПЕТ** се дели на 5 и числото **ДЕВЕТ** се дели на 9.

Решение: Да започнем със забележката, че $T = 0$ или $T = 5$ и че $C = D + 1$. Като “премахнем” по D десетохиляди от двете страни на равенството, ребусът ще приеме вида **ЕДНО + ДВЕ + ЕВЕТ = ПЕТ + ЕДЕМ + 10000** и от него можем да “премахнем” още E хиляди и D стотици, за да получим **НО + ДВЕ + ЕВЕТ = ПЕТ + ЕМ + 10000**. Оттук е ясно, че за да има ребусът решение, единствената възможност е $E = 9$, защото в противен случай лявата страна на последното равенство ще е по-малка от 10000. От признака за делимост на 9 следва, че сумата $D + B + T$ се дели на 9. Като премахнем още E хиляди от двете страни на последното равенство, получаваме

$$\text{НО} + \text{ДВЕ} + \text{ВЕТ} = \text{ПЕТ} + \text{ЕМ} + 1000,$$

а оттук следва, че $\text{Д} + \text{В}$ е поне 10, защото в противен случай лявата страна ще е по-малка от дясната. Оттук следва изводът, че $\text{Д} + \text{В} + \text{Т} = 18$. В частност не е възможно $\text{Т} = 0$ и следователно $\text{Т} = 5$. Остава $\text{Д} + \text{В} = 13$ и понеже цифрите 5 и 9 вече са използвани, единствените възможни варианти са $\text{Д} = 6, \text{В} = 7$ или $\text{Д} = 7, \text{В} = 6$. И двата случая, с помощта на равенството $\text{Д} + \text{В} = 13$, от $\text{НО} + \text{ДВЕ} + \text{ВЕТ} = \text{ПЕТ} + \text{ЕМ} + 1000$ получаваме $\text{НО} + \text{ВЕ} + \text{ЕТ} + 1300 = \text{ПЕТ} + \text{ЕМ} + 1000$ е след “премахването” на събираемото ЕТ от двете страни на равенството, достигахме до

$$\text{НО} + \text{ВЕ} + 300 = \text{ПЕТ} + \text{ЕМ} + 1000$$

$$\text{НО} + \text{ВЕ} + 300 = \text{П} \cdot 100 + \text{ЕМ}.$$

Единствената възможна стойност на П е $\text{П} = 3$. Като използваме вече намерените цифри, без затруднение достигахме до единственото решение на ребуса, а именно

$$9721 + 769 + 79695 = 395 + 89790.$$

Стилба 2. Конструкции и контрапримери – аритметика и алгебра. Това е също много популярна и широко застъпена тема, основната идея на задачите в която е да се конструира пример на математически обект с дадени свойства или да се покаже, че такъв не съществува. Предназначена е за ученици от 6-7 клас.

Задача 1. (1993, 6, 87,4%) С дадено естествено число може да се извършва някоя от следните две операции:

1) Да се раздели на 2, ако числото е четно.

2) След последната му цифра да се запише цифрата 6.

Началното число е 1. Възможно ли е след краен брой операции от вида 1) и 2), извършени в някакъв ред, да получим:

а) 1994 б) 1995 в) 2000?

Решение: а) Възможно е. Ето как може да стане това: $1 - 16 - 166 - 83 - 836 - 418 - 209 - 2096 - 1048 - 524 - 262 - 131 - 1316 - 658 - 329 - 3296 - 1648 - 824 - 412 - 206 - 103 - 1036 - 518 - 259 - 2596 - 1298 - 649 - 6496 - 3248 - 1624 - 812 - 406 - 203 - 2036 - 1018 - 509 - 5096 - 2548 - 1274 - 637 - 6376 - 3188 - 1594 - 797 - 7976 - 3988 - 1994$.

б, в) Не е възможно. Достатъчно е да отбележим, че никоя от двете операции не може да ни доведе до число с последна цифра 0 или 5.

Задача 2. (2006, 7, 83,3%) Съществува ли естествено число n , за което числото $n^2 + n + 2006$ се дели на 2005?

Решение: Ще използваме, че $2005 = 5 \cdot 401$. За да се дели числото $n^2 + n + 2006$

на 2005, то трябва да се дели на 5, но тогава и числото $n^2 + n + 1$ трябва да се дели на 5. Като разгледаме обаче всички остатъци, които числото n дава при деление на 5, виждаме, че това е невъзможно. Следователно няма n с исканото свойство.

Задача 3. (1993, 6, 80,9%) Съществува ли цяло положително число със следното свойство: Ако зачертаем първата му (отляво надясно) цифра, то се намалява

- а) 57 пъти б) 58 пъти?

Решение: а) Такова е например числото 7125, което не е единствено.

б) Да допуснем, че има такова число и нека то има $k \geq 2$ цифри, като старшата от тях е x . Нека след зачертаването на x се получава $(k-1)$ -цифреното число y . Тогава би трябвало да е вярно равенството $10^k \cdot x + y = 58y$ или $10^k \cdot x = 57y$. Това обаче е невъзможно, понеже числото в дясната страна на равенството е кратно на 19, а в лявата – не.

Задача 4. (1993, 6, 77,9%) Колко най-много числа могат да бъдат записани едно след друго така, че сумата на всеки три последователно записани числа да е положителна, а сумата на всеки две последователно записани числа да е отрицателна?

Решение: Да допуснем, че могат да се запишат повече от три числа по искания начин и нека a, b, c, d са първите четири числа от записаните. Тогава трябва да са верни неравенствата:

- (1) $a + b < 0$;
- (2) $b + c < 0$;
- (3) $c + d < 0$;
- (4) $a + b + c > 0$;
- (5) $b + c + d > 0$.

От неравенства (1) и (4) следва, че $c > 0$, а от неравенства (2) и (5) следва, че $d > 0$. Но тогава $c + d > 0$, което е невъзможно съгласно неравенство (3). И така търсените числа са не повече от 3. Числата **2; -3; 2** показват, че техният брой е точно 3.

Задача 5. (1993, 7, 76,3%) Нека x е n -цифрено число и y е естествено число, което се получава чрез някакво разместване на цифрите на x . Възможно ли е равенството $x + y = \underbrace{99 \dots 9}_n$, ако

- а) $n = 1994$; б) $n = 1995$?

Решение: Ще приведем решението на участника *Иван Георгиев* от Пловдив. Нека $x = x_1 x_2 \dots x_n$ и $y = y_1 y_2 \dots y_n$, $x + y = \underbrace{99 \dots 9}_n$ и цифрите на y са цифрите на x ,

разместени по някакъв начин. Да отбележим, че тъй като $x_i + y_i \leq 18, i = 1, 2, \dots, n$, то при събирането на x и y в никой от разредите не се получава пренос. Оттук получаваме, че:

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_1 + y_2 + \dots + y_n = \underbrace{9 + 9 + \dots + 9}_n = 9n.$$

Но от условието следва и равенството:

$$(2) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_1 + y_2 + \dots + y_n = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

От (1) и (2) следва, че $9n = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, което показва, че n е четно число. Оттук веднага следва, че отговорът на б) е отрицателен. Положителният отговор на а) може да се обоснове чрез примера $x = \underbrace{5454 \dots 54}_{1994}; y = \underbrace{4545 \dots 45}_{1994}$.

Задача 6. (1996, 6, 72,1%) Към дадено число прибавяме неговото реципрочно, с полученото извършваме същото и така нататък. Ако началното число е $\frac{1}{3}$, възможно ли е след няколккратно прилагане на тази операция да се получи числото:

а) $\frac{1996}{1997}$; б) $\frac{1996}{9}$?

Решение: Ще приведем решението на участника *Румен Зарев* от София. Ще докажем, че ако едно рационално число се представя като несъкратима дроб $\frac{a}{b}$, където a е нечетно число, а b е четно число, то $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ има същия вид. Наистина $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$ и ab е четно, а $a^2 + b^2$ е нечетно. Може лесно да се покаже, че при наложените ограничения за a и b дробта $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ е несъкратима, но това не е необходимо. Дори и тази дроб да е съкратима, след евентуалното съкращаване новите числител и знаменател ще имат същата четност като предишните. В конкретния случай от $\frac{1}{3}$ получаваме $\frac{10}{3}$, след това $\frac{109}{30}$ и вече е ясно, че на всяка следваща стъпка ще получаваме дроб с нечетен числител и четен знаменател. Оттук следва, че и за двете подточки отговорът е отрицателен.

Задача 7. (1997, 6, 70%) Съществува ли естествено число N , кратно на 11, чиито цифри са различни и нарастват отляво надясно? Отговорът да се обоснове!

Решение: Да допуснем, че такова число съществува и нека N е най-малкото число с исканото свойство. Нека N има k цифри. Ясно е, че $k \geq 3$. Но тогава

числото $N - \underbrace{1100 \dots 0}_{k-2}$ е от разглеждания вид, има желаното свойство и е по-малко от N , което е противоречие.

Задача 8. (1997, 6, 68,6%) Може ли число от вида 123456789...987654321 (многообразието означава произволен набор от цифри) да е квадрат на цяло число?

Решение: Малко неочаквано за участниците, но отговорът е положителен. Да забележим, че $11^2 = 121, 111^2 = 12321, 1111^2 = 12321, \dots$ Вече не е много трудно да конструираме желания квадрат, но не $111111111^2 = 12345678987654321$, а например $111111111011111111^2 = 1234567899012345679765432098987654321$.

Задача 9. (2004, 6, 66,2%) Съществуват ли естествени числа x и y такива, че $НОД(x; y) + НОД(x+1; y+1) = x - y$?

Решение: Да допуснем, че има такива естествени числа x и y и нека $d = НОД(x; y)$. Понеже d ще дели $x - y$, то d ще дели и $НОД(x+1; y+1)$, а следователно и поотделно $d / (x+1)$ и $d / (y+1)$. Но щом $d / (x+1)$ и d / x , то d ще дели и $(x+1) - x = 1$. Това означава, че $d = НОД(x, y) = 1$, т.е. x и y са взаимно прости. Нека сега $d_1 = НОД(x+1; y+1)$. Можем да запишем даденото равенство във вида $1+d_1 = x - y$ или още във вида $1+d_1 = (x+1) - (y+1)$, откъдето следва, че дясната страна на равенството ще се дели на d_1 . Това обаче означава, че $d_1 = 1$ и получаваме, че $x - y = 2$. Последното означава, че x и y са с еднаква четност. Ако те са четни, ще получим противоречие с $d = 1$, а ако са нечетни, ще получим противоречие с $d_1 = 1$. Следователно не съществуват числа x и y , удовлетворяващи даденото равенство.

Задача 10. (1993, 7, 61,5%) Върху една окръжност са написани 1993 числа – 996 единици и 997 нули. Всяка секунда се извършва следната операция: между всеки две съседни числа се написва 1, ако тези съседни числа са еднакви, и 0, ако са различни, като старите числа се изтриват. Възможно ли е в някакъв момент всички написани върху окръжността числа да са равни?

Решение: Не е възможно. Да допуснем, че това е възможно и да разгледаме момента, в който всички числа стават равни. Ако всички те са единици, това означава, че числата са били равни и една секунда по-рано. Ако всички са нули, то предишната секунда би трябвало всяка нула да стои между две единици и всяка единица да стои между две нули. Последното обаче е невъзможно, защото броят на всички числа е 1993 – нечетно число.

Задача 11. (1997, 7, 58,2%) Може ли произведението на някои 99 от числата $1!, 2!, \dots, 100!$ да е точен квадрат? ($n! = n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

Решение: Да забележим, че всяко естествено число n , $2 \leq n \leq 100$ участва в произведението $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 100!$ точно $(101-n)$ пъти или:

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 100! = 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdot \dots \cdot 99^2 \cdot 100.$$

Всички нечетни множители в дясната страна на равенството са с четни степенни показатели, което означава, че произведението им е точен квадрат. Произведението на четните множители може да бъде записано във вида $(2^{98} \cdot 4^{96} \cdot \dots \cdot 98^2) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 100)$. Очевидно множителят в първите скоби е точен квадрат. Множителят във вторите скоби може да бъде записан във вида $2^{50} \cdot 50!$. Това означава, че числото $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 100!$ се записва като произведение на точни квадрати и на $50!$, т.е. числото $\frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 100!}{50!}$ е точен квадрат. Следователно отговорът на въпроса в задачата е утвърдителен.

Задача 12. (2005, 6, 53%) Има ли три различни естествени числа, такива че сборът на всеки две от тях да е равен на степен на числото

- а) 3; б) 2^p

Решение: Нека дадените числа са a, b, c .

а) Ако исканото е възможно, то би трябвало да са изпълнени равенствата $a+b=3^k$, $b+c=3^m$, $c+a=3^n$ за някакви естествени числа k, m, n . Като съберем трите равенства, ще получим, че $2(a+b+c) = 3^k + 3^m + 3^n$. Това равенство е невъзможно, понеже числото в лявата му страна е четно, а в дясната е нечетно.

б) Нека $a < b < c$. Да допуснем, че са верни равенствата $a+b=2^n$, $b+c=2^k$ и $c+a=2^p$ за някакви естествени числа n, k и p . От $a < b < c$ следва, че $a+b < a+c < b+c$, откъдето $2^n < 2^p < 2^k$. Но

$$2^n + 2^p = (a+b) + (a+c) = 2a + (b+c) > b+c = 2^k,$$

т.е. $2^k < 2^n + 2^p$. От друга страна, $2^n + 2^p \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$, което е противоречие. Следователно отговорът и в двете подточки на задачата е отрицателен.

Задача 13. (2006, 6, 52,2%) Да се докаже, че:

а) не съществува естествено число n такова, че числата n и $n+2006$ да имат един и същ сбор на цифрите си;

б) съществуват безброй много естествени числа n такива, че числата n и $n+2007$ имат един и същи сбор на цифрите си.

Решение: а) За всяко естествено число n числата n и $n+2006$ дават различ-

ни остатъци при деление на 3. Тогава и сумите от цифрите им ще дават различни остатъци при деление на 3 и значи не могат да бъдат равни.

б) Числата от вида $n = 10 \dots 03$, където броят на нулите е произволен, отговарят на исканото в условието.

Задача 14. (1997, 7, 46,1%) Може ли числото 1 да се представи като сума на различни положителни дробни с числител 1, всяка от които е по-малка от $\frac{1}{1000}$?

Решение: Отговорът е утвърдителен. Да забележим, че $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. След това, като използваме тъждеството $\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}$, заменяме всяка от дробите в дясната страна на равенството със сума на две дробни с числител 1 и знаменатели, по-големи от първоначалните. Например, на втората стъпка ще получим равенството $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{42}$. Ако при някоя стъпка получим в дясната част на равенството равни дробни, към едната от тях отново прилагаме горното тъждество и т.н. Ясно е, че след всяка стъпка най-малкият знаменател на някоя от дробите в дясната страна е по-голям от съответния минимален знаменател преди съответната стъпка. След краен брой такива стъпки (не повече от 1000) ще получим желаното представяне.

Задача 15. (2007, 6, 46%) За всяко естествено число n , с $S(n)$ означаваме сумата от цифрите му. Съществува ли естествено число k , такова че:

а) $S(k) + S(k^2) = 2008$; б) $S(k) + S(k^2) = 2009$?

Решение: а) Такова число не съществува. Ако k се дели на 3, то и $k^2, S(k), S(k^2)$ ще се делят на 3, докато 2008 не се дели на 3. Ако k не се дели на 3, то и $S(k)$ не се дели на 3. Но тогава k^2 и $S(k^2)$ ще дават остатък 1 при деление на 3. Ако допуснем, че съществува число k с исканото свойство, то k няма да се дели на 3. От друга страна, $S(k) = 2008 - S(k^2)$ и понеже числата 2008 и $S(k)$ дават остатък 1 при деление на 3, то тяхната разлика ще се дели на 3. Т.е. $S(k^2)$ ще се дели на 3 и тогава k ще се дели на 3, което е противоречие.

б) Да разгледаме числото $k = \underbrace{33 \dots 3}_n 4$ и да пресметнем k^2 . Имаме

$$k = \underbrace{33 \dots 3}_{n+1} + 1 = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{n+1} + 1 = \frac{1}{3} (10^{n+1} - 1) + 1 = \frac{10^{n+1} + 2}{3}.$$

Тогава $k^2 = \frac{10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4}{9}$ и можем да запишем k^2 във вида

$$k^2 = \frac{10^{2n+2} - 1 + 1 + 4 \cdot 10^{n+1} - 4 + 4 + 4}{9} = \frac{10^{2n+2} - 1}{9} + \frac{4(10^{n+1} - 1)}{9} + 1,$$

откъдето получаваме

$$k^2 = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{2n+2} + \frac{4}{9} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{n+1} + 1 = \underbrace{11 \dots 1}_{2n+2} + \underbrace{44 \dots 4}_{n+1} + 1 = \underbrace{11 \dots 1}_{n+1} \underbrace{55 \dots 5}_n 6.$$

Следователно $S(k) = 3n + 4$ и $S(k^2) = 6n + 7$. Равенството $S(k) + S(k^2) = 2009$ ще приеме вида $3n + 4 + 6n + 7 = 2009 \Leftrightarrow 9n + 11 = 2009 \Leftrightarrow n = 222$. Следователно числото $k = \underbrace{33 \dots 34}_{222}$ удовлетворява условието на задачата.

Задача 16. (2000, 7, 45,4%) а) Може ли числото 1 да се представи като сума на повече от две различни дробни с числители 1 и знаменатели – нечетни естествени числа?

б) Може ли числото $\frac{1}{2}$ да се да се представи като сума на повече от две различни дробни с числители 1 и знаменатели – точни квадрати на естествени числа?

Решение: а) Отговорът е да. Един пример за такова представяне е равенството

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{105} + \frac{1}{135}.$$

б) Тук отговорът е също положителен. Като пример би могло да се посочи равенството $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} + \frac{1}{24^2} + \frac{1}{30^2} + \frac{1}{40^2} + \frac{1}{60^2} + \frac{1}{120^2}.$

Задача 17. (1998, 7, 42,2%) Съществували ли число x , за което $[2x] + [3x] + [5x] = 1999$?

Решение: Ще използваме, че за всяко естествено число n и всяко число x е вярно $n[x] \leq [nx] \leq n[x] + n - 1$. Като запишем тези неравенства за $n = 2, 3$ и 5 и ги съберем, ще получим $10[x] \leq [2x] + [3x] + [5x] \leq 10[x] + 7$. Това означава, че ако някакво естествено число k може да се запише във вида $[2x] + [3x] + [5x]$, то при деление на 10 k трябва да дава някой от остатъците $0, 1, 2, \dots, 7$. Но 1999 дава остатък 9 при деление на 10 и следователно не съществува число x с исканото свойство.

Задача 18. (2002, 7, 41%) Съществува ли естествено число k , такова, че числото:

а) $n(n+3)(n+4)(n+7) + k$; б) $n(n+3)(n+4)(n+8) + k$

е точен квадрат на естествено число за всяко естествено число n ?

Решение: а) Нека означим $n(n+7) = t$. Тогава

$$n(n+3)(n+4)(n+7) + k = t(t+12) + k = (t+6)^2 + 36 - k,$$

откъдето следва, че числото $k = 36$ има свойството, искано в задачата.

б) Да допуснем, че съществува число k с исканото свойство. Тогава при $n = 2$ получаваме, че числото $600 + k$ трябва да е точен квадрат, т.е. $600 + k = a^2$ за някое естествено число a . При $n = 3$ получаваме, че числото $1386 + k$ трябва да е точен квадрат, т.е. $1386 + k = b^2$ за някое естествено число b . От двете получени равенства следва обаче, че $b^2 - a^2 = 786$. Оттук a и b имат еднаква четност и тогава $b^2 - a^2$ ще се дели на 4, докато 786 не се дели на 4. Следователно търсеното k не съществува.

Задача 19. (2004, 6, 37,2%) Може ли да се разположат върху окръжност 2005 различни естествени числа така, че за всеки две съседни числа отношението на по-голямото към по-малкото да е просто число?

Решение: Да допуснем, че е възможно да се поставят числата $a_1, a_2, \dots, a_{2005}$ по желания начин. Ако $a_i > a_{i+1}$, то $\frac{a_i}{a_{i+1}} = p_j$, където $p_j, 1 \leq j \leq 2004$ е някакво просто число. А ако $a_i < a_{i+1}$, то $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{1}{q_j}$, където q_j е някакво просто число. По условие $a_i \neq a_{i+1}$ за всяко i . Тогава $1 = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_{2004}}{a_{2005}} \cdot \frac{a_{2005}}{a_1} = \frac{p_1 \cdot \dots \cdot p_k}{q_1 \cdot \dots \cdot q_{2005-k}}$. Но за да се получи 1, трябва броят на числата в числителя да е равен на броя на числата в знаменателя, а това е невъзможно, защото води до равенството $2k = 2005$.

Задача 20. (1993, 7, 34,1%) Всяка от цифрите 0,1,2,...,9 е използвана точно по един път в записа на две петцифрени числа. Възможно ли най-големият общ делител на тези числа да е равен на:

- а) 1; б) 165; в) 495?

Решение: Впечатляващо е разнообразието на идеи, които участниците са предложили при решаването на първата част от задачата. Ето някои от тях: числата 24680 и 13579 са решение на а), понеже $24680 = 2^3 \cdot 5 \cdot 617$ и нито едно от простите числа 2, 5, 617 не е делител на 13579. По същите съображения двойката 16384 = 2^{14} и 20795 е решение. Равенството $50216 - 49873 = 343 = 7^3$ лесно води до извода, че числата 50216 и 49873 са решение на а). За другите две части на задачата ще следваме решението на участничката Велина Колева от Стара Загора. За втората част тя посочва числата $68145 = 165 \cdot 7 \cdot 59$ и $92730 = 165 \cdot 2 \cdot 281$. Да отбележим, че примерът, водещ до утвърдителен отговор на б), не е единствен. Други участници са предложили други примери, като $\text{НОД}(14685, 27390) = 165$, $\text{НОД}(29370, 68145) = 165$ и др. В третата част ще следваме решението на Велина. Тъй като $495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$, то търсените

две числа трябва да се делят на 5, 9 и 11. Да допуснем, че съществуват две такива числа. Означаваме ги съответно с $abcde$ и $xyzt$. За да си осигурим делимост на 5, трябва едно от числата да завършва на 5, а другото на 0. Без ограничение на общността на разсъжденията, можем да приемем, че $e = 0$ и $s = 5$. Да отбележим, че $a+b+c+d+e+x+y+z+t+s=0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Според признака за делимост на 9 е необходимо (и достатъчно) сумите $a+b+c+d+e$ и $x+y+z+t+s$ да се делят на 9. Тъй като $0+1+2+3+4=10$, то никоя от двете суми не може да е равна на 9 и респективно на 36 (защото тогава другата ще е равна на 9). Следователно, налице са две възможности, които ще разгледаме поотделно.

I случай. $a+b+c+d+e=18$. Тъй като $e=0$, то $a+b+c+d=18$. Според признака за делимост на 11 обаче сумите $a+c+e$ и $b+d$ трябва да се различават с кратно на 11. Единствената възможност това да се случи е $a+c=b+d=9$, което означава, че цифрите a, b, c, d са различни от 9. Но щом $a+b+c+d+e=18$, то $x+y+z+t+5=27$. Отново от признака за делимост на 11 получаваме, че трябва да е изпълнено равенството $x+z+5=11+y+t$. Оттук получаваме, че $x+z+5=19$; $y+t=8$, тоест $x+z=14$ и $y+t=8$. От тези две равенства следва, че никоя от цифрите x, y, z, t не може да е равна на 9. Следователно този случай е невъзможен, защото никоя от десетте цифри $a, b, c, d, e, x, y, z, t, s$ не е равна на 9.

II сл. $a+b+c+d+e=27$, т.е. $a+b+c+d=27$. Но за да се дели числото $abcd0$ на 11, необходимо е $|a+c-b-d|=11$ ($a+c$ не може да е равно на $b+d$, тъй като сборът от двете суми е нечетното число 27). От последното равенство следва, че или $a+c=19$, или $b+d=19$. Но нито едно от двете равенства не е възможно, защото всяка от тези две суми е най-много 17.

С това задачата е решена. Някои от участниците в конкурса са опитали да направят решение, като изчерпат всички възможности за петцифрените кратни на 495, които се записват с различни цифри. Тъй като обаче броят на тези числа е доста голям, то нямаше участник, който да успее да разгледа всички възможности.

Задача 21. (2003, 7, 33,3%) Съществуват ли цели положителни числа x и y , такива че:

а) $x^3 + y^4 = 2^{2003}$; б) $x^3 + y^4 = 2^{2005}$?

Решение: а) Разглеждайки остатъците на третите и четвъртите степени по модул 13, виждаме, че лявата страна на равенството може да дава остатъците 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12 по модул 13, докато $2^{2003} \equiv 7 \pmod{13}$. Ето защо отговорът на въпроса е отрицателен.

б) От равенствата $2^{2005} = 2 \cdot 2^{2004} = 2^{2004} + 2^{2004} = (2^{668})^3 + (2^{501})^4$ следва, че съществуват числа, удовлетворяващи даденото равенство.

Задача 22. (1995, 6, 29,3%) На левия бряг на една река има една лодка, няколко рибари и 20 деца, а на десния бряг срещу тях има само рибари без лодка. Лодката се управлява или от един рибар и едно дете, или от четири деца. В нея не могат да се возят нито повече, нито по-малко хора. Могат ли рибарите да прехвърлят децата на десния бряг?

Решение: Да забележим, че ако първото прехвърляне от левия към десния бряг се състои от 1 рибар и 1 дете, то при обратния ход на лодката единственото възможно прехвърляне е пак 1 рибар и 1 дете, след което се връщаме в изходната ситуация. Следователно единственият смислен ход е отначало да прехвърлим вдясно 4 деца. Сега да забележим, че за да избегнем повтаряне на вече срещана ситуация, следващият ход на прехвърляне трябва да е противоположен на току-що направения. Това обаче означава, че всеки ход на прехвърляне (който не ни води до вече случила се ситуация с положението на рибарите и децата) е еднозначно определен. Можем да направим следната таблица, отговаряща на положението и броя на децата на рибарите след съответното прехвърляне (приемаме, че отначало на левия бряг имаме a рибари, а на десния b рибари):

Ляв бряг (рибари, деца)	Десен бряг (рибари, деца)
$a, 20$	$b, 0$
$a, 16$	$b, 4$
$a + 1, 17$	$b - 1, 3$
$a + 1, 13$	$b - 1, 7$
$a + 2, 14$	$b - 2, 6$
$a + 2, 10$	$b - 2, 10$
$a + 3, 11$	$b - 3, 9$
.....	

Виждаме, че във всеки един момент броят на децата на десния бряг на реката е или кратен на 3, или дава остатък 1 при деление на 3. Следователно той никога не може да стане равен на 20, т.е. исканото е невъзможно.

Задача 23. (1997, 6, 23%) Може ли множеството на естествените числа да се раздели на три групи, които нямат помежду си общи елементи така, че ако x е число от едната група, а y е число от другата група, то $x + y + xy$ да е число от третата група?

Решение: Нека групата, в която попада числото 1, е означена с A . Нека също така x е най-малкото естествено число, което не е в A . Да означим групата на x с B и да предположим, че $x > 3$. Тогава $3 \in A$. Нека третата група от числа е C . От $1 \in A$, $x \in B$ следва, че $1+x+1 \cdot x = 2x+1 \in C$. От $1 \in A$, $2x+1 \in C$ следва, че $1+2x+1+1 \cdot (2x+1) = 4x+3 \in B$. От $3 \in A$, $x \in B$ следва, че $3+x+3 \cdot x = 4x+3 \in C$. Получихме, че числото $4x+3$ едновременно е в B и в C , което е невъзможно. Следователно $x \leq 3$. Налице са две възможности: $x = 2$ или $x = 3$, които ще разгледаме последователно:

Случай I. $x = 2$, т.е. $2 \in B$. От $1 \in A$, $2 \in B$ следва, че $1+2+1 \cdot 2 = 5 \in C$. От $1 \in A$, $5 \in C$ следва, че $11 \in B$. Ако предположим, че $3 \notin B$, ще получим, че числото $2+3+2 \cdot 3 = 11$ е в A или в C (в зависимост от това дали $3 \in C$ или $3 \in B$), но вече видяхме, че $11 \in B$. Следователно $3 \in B$. Но тогава $1+3+1 \cdot 3 = 7 \in C$, от $1 \in A$, $7 \in C$ следва, че $1+7+1 \cdot 7 = 15 \in B$. От $1 \in A$, $15 \in B$ следва, че $1+15+1 \cdot 15 = 31 \in C$, а от $3 \in B$, $7 \in C$ следва, че $3+7+3 \cdot 7 = 31 \in A$. Получихме, че $31 \in A$ и $31 \in C$, което е невъзможно.

Случай II. $x = 3$, което означава, че $2 \in A$ и $3 \in B$. От $1 \in A$, $3 \in B$ следва $7 \in C$, а от $2 \in A$, $3 \in B$ следва $11 \in C$. От $1 \in A$, $7 \in C$ получаваме $15 \in B$. Но тогава от $1 \in A$, $15 \in B \Rightarrow 31 \in C$, а от $3 \in B$, $7 \in C \Rightarrow 31 \in A$, което е невъзможно.

Следователно отговорът на въпроса в задачата е отрицателен.

Задача 24. (2007, 7, 14,2%) За всяко естествено число n със $\sigma(n)$ означаваме сумата на всички делители на n , по-малки от него. Докажете, че съществуват безброй много естествени числа n , за които $\sigma(\sigma(n)) > \sigma(n) > n$.

Решение: Ще покажем, че всички числа от вида $n = 24p$, където $p > 3$ е просто число, изпълняват исканото в задачата. Собствените делители на числото n са $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, p, 2p, 3p, 4p, 6p, 8p, 12p$, а сумата им е равна на $\sigma(n) = 12(3p+5)$. Това веднага доказва неравенството $\sigma(n) > n$. Остана да покажем второто неравенство. Томоже да бъде записано във вида $\sigma(\sigma(n)) > \sigma(n) \Leftrightarrow \sigma(12(3p+5)) > 12(3p+5)$. Но числата $6(3p+5)$, $4(3p+5)$ и $3(3p+5)$ са собствени делители на $12(3p+5)$ и сумата им е по-голяма от $12(3p+5)$, с което желаното неравенство е доказано.

Заклучение. Ще завършим със забележката, че конструираниите две стълби от задачи далеч не изчерпват потенциала на системата Ум⁺, но дават достатъчно добра представа за качествата на задачите като инструмент за идентификация. Измежду останалите задачи има много други, с чиято помощ могат да бъдат конструирани други стълби, но това е предмет на друго изследване.

ЛИТЕРАТУРА

- Кендеров, П. & Гроздев, С. (2004). Европейският проект “MATH EU: откриване, мотивиране и подкрепа на математическите таланти в европейските училища”. *Математика и математическо образование*. 33 пролетна конференция на СМБ, Боровец, 1–4 април 2004. София: СМБ, 39–49.
- Гроздев, С. & Кендеров, П. (2005). Инструментариум за откриване и подкрепа на изявени ученици по математика. *Математика и математическо образование*. 34 пролетна конференция на СМБ, Боровец, 6–9 април 2005. София: СМБ, 53–64.
- Кендеров, П. & Гроздев, С. (2006). Диференцираното обучение по математика в европейските училища. *Математика и математическо образование*. 35 пролетна конференция на СМБ, Боровец, 5–9 април 2006. 39–49.
- Гроздев, С. & Дойчев, С. (2011). *Математически тестове. 3 – 7 клас*. София: Регалия 6.
- Гроздев, С. & Дойчев, С. (2011). *Математически тестове. 8 – 12 клас*. София: Регалия 6.

Сава Гроздев

професор, доктор по математика, доктор на педагогическите науки
Институт по математика и информатика – БАН
ул. “Акад. Г. Бончев”, бл. 8
1113 София, България
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Светлозар Дойчев

учител по математика, доктор по педагогика
Математическа гимназия, гр. Стара Загора

TWO DIDACTICAL LADDERS

Abstract. In the middle of 2003 eight countries from the European Union – Bulgaria, United Kingdom (later substituted by Hungary), Germany, Greece, Italy, Cyprus, Romania and Czech Republic, started the large scale European project “MATHEU: identification, motivation and support of mathematical talents in European schools”. One of the main tasks of the project was the elaboration of systems of problems with increasing difficulty, named *ladders*, to realize the defined goals. The present paper is dedicated to such two ladders.

✉ **Sava Grozdev**

Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Svetlozar Doichev

Teacher in Mathematics, PhD in Pedagogy
Mathematical High School, Stara Zagora