

ДВАДЕСЕТ И ШЕСТА МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Доц. д-р Ивайло Кортезов, Мирослав Маринов

Институт по математика и информатика – Българска академия на науките

Резюме. Статията съдържа състезателната тема от Младежката балканска олимпиада по математика 2022, варианти на решения на задачите и коментари по тях, а също и преглед на представянето на отбора. Материалите могат да са от полза за школите за подготовка за математически състезания VII – IX клас.

Ключови думи: математически състезания; Младежка балканиада по математика

Двадесет и шестата младежка балканска олимпиада по математика (МлБОМ) за ученици до 15,5 години, организирана от Математическото общество на Югоизточна Европа (MASSEE) и домакин Босна и Херцеговина, се проведе в Сараево в периода 28 юни – 3 юли 2022 г. В олимпиадата взеха участие ученици от 19 отбора от 18 държави: Азербайджан (гост), Албания, Босна и Херцеговина (2 отбора), България, Гърция, Казахстан (гост), Кипър, Киргизстан (гост), Молдова, Румъния, Саудитска Арабия (гост), Северна Македония, Сърбия, Таджикистан (гост), Турция, Франция (гост), Хърватска (гост) и Черна гора. Отборът на България за МлБОМ, избран съгласно наредбата на МОН въз основа на резултатите от Зимните математически състезания (за VIII и IX клас), Пролетните математически състезания (за VII, VIII и IX клас), Националния кръг на олимпиадата по математика (за VII и VIII клас) и три контролни работи, беше в състав:

1. Сара Илиева, VIII клас, ПЧМГ – София
2. Рая Шикова, IX клас, ПМГ „Акад. Иван Гюзелев“ – Габрово
3. Илия Василев, IX клас, ПЧМГ – София
4. Николай Любенов, VIII клас, СМГ „Паисий Хилендарски“ – София
5. Мая Минкова, VII клас, СУ „Любен Каравелов“ – Несебър
6. Мария Касия Петрова, VII клас, ПЧМГ – София

Ръководството на отбора беше поверено на авторите на тази статия. Беше проведена 14-дневна подготовка: дистанционна (9 – 12.6.2022) и присъствена (17 – 26.6.2022) с общо 9 състезания (математически бой или контролна работа) и 106 учебни часа лекции в ИМИ – БАН. Състезателният ден на МлБОМ беше 30.6.2022.

Резултати на отбора на България в XXVI МлБОМ

Състезател	1	2	3	4	Сбор	Медал
Илия Василев	10	10	10	9	39	златен
Мая Минкова	10	4	7	0	21	сребърен
Сара Илиева	10	1	6	0	17	бронзов
Мария Касия Петрова	10	0	7	0	17	бронзов
Рая Шикова	10	0	6	0	16	бронзов
Николай Любенов	7	0	2	0	9	
БЪЛГАРИЯ	57	15	38	9	119	

В отборното класиране сред 11-те официални участници България зае пето място, а сред всички 19 участници – осмо. Предвид това, че през последните две години се класирахме отборно съответно първи и втори (Kortezov 2021); (Kortezov, Karlov & Marinov 2021), този резултат изглежда като отстъпление. За подобен извод наемква и сравнението при медалите: през 2018 г. отборът на България завоюва 2 златни и 4 сребърни (Kortezov, Karlov & Tomova 2018); през 2019 г. и през 2020 г. – 2 златни, 3 сребърни и 1 бронзов (Kortezov 2021); през 2021 г. – 1 златен, 2 сребърни и 3 бронзови (Kortezov, & Karlov 2019); (Kortezov, Karlov & Marinov 2021). Но предвид това, което (не) показаха учениците, завършили сега VIII клас, в състезанията през последната учебна година, постигнатият резултат е повече от задоволителен. Сравнението с резултатите на останалите отбори налага извода, че основните пропуски са в геометричната задача. Това едва ли изненадва някого предвид изоставането на националната ни учебна програма в частта по геометрия спрямо тези при основните ни конкуренти. Ето състезателната тема заедно с решения и коментари по задачите.

Задача 1. Да се намерят всички двойки $(a;b)$ от естествени числа, такива, че: $11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab$.

Решение. Явно $a^3 - b^3 \geq 11ab > 0$ и $a > b$. Оттук можем да запишем $a = b + x$ за $x > 0$. Получаваме $11b^2 + 11bx \leq 3b^2x + 3bx^2 + x^3 \leq 12b^2 + 12bx$, което записваме като $(b^2 + bx)(11 - 3x) \leq x^3 \leq (b^2 + bx)(12 - 3x)$. Щом $x > 0$, дясната страна е положителна, значи $12 - 3x > 0$ и $x \leq 3$. При $x = 1$ искаме $8(b^2 + b) \leq 1$, което няма решение, а при $x = 2$ искаме $5(b^2 + 2b) \leq 8$, което също е невъзможно. При $x = 3$ искаме $2(b^2 + 3b) \leq 27 \leq 3(b^2 + 3b)$, т.е. $9 \leq b^2 + 3b \leq 13$, което е вярно само при $b = 2$, съответно $a = 5$.

Коментар. Очаквано, по тази много лесна задача отборът ни се справи почти перфектно. Възможна концептуална грешка, допусната от шестима

състезатели (вкл. един от нашите), е от $x^3 > 0$ да се направи „извод“, че $(b^2 + bx)(11 - 3x) > 0$ и $x \leq 3$. По тази причина замяната на 11 вместо 12 не можеше да се счете за техническа грешка и се наказваше със загуба на цели 3 точки. Беше ценно, че успяхме да се преборим тази задача да влезе в темата, понеже всички останали предложения по алгебра в шортлиста бяха за доказване на неравенства. Тук е времето да отбележим, че въпреки нарастващия обществен натиск, че материалът по математика в училище е много, в България този тип задачи не са част от учебния материал, което е и спънка за използването им в националните състезания, докато в държави с далеч по-малки традиции в състезателната математика те задължително присъстват.

Задача 2. Триъгълникът ABC е остроъгълен и $AN = HD$, където H е неговият ортоцентър, а D е петата на височината от A към BC . Допирателната в точка H към описаната около триъгълника BHC окръжност пресича страните AB и AC съответно в точките S и T . Точките M и N са средите съответно на BH и CH . Да се докаже, че правите SM и TN са успоредни.

Решение. (*Първи метод*) Нека K е средата на AB . Тогава $KH \parallel BD$ и $KM \parallel AN$ като средни отсечки, откъдето $\angle SKM = \angle BAN = \angle BCH = \angle SHM$ (последното заради допирателната) и значи $KHMS$ е вписан. Оттук $\angle MSH = \angle MKH = \angle KHA = \angle BDA = 90^\circ$, т.е. MS и ST са перпендикулярни. Аналогично NT и ST са перпендикулярни и исканото следва.

(*Втори метод*) Ако C_1 е петата на височината през върха C , то BC_1HD е вписан, $\angle BAN = \angle BCH = \angle BHS$ и $\angle C_1DH = \angle C_1BH = \angle SBH$, откъдето $\triangle HSB \sim \triangle AC_1D$. В това подобие SM и C_1H са съответни медиани и следователно $\angle MSH = \angle HC_1A = 90^\circ$, т.е. MS и ST са перпендикулярни. Аналогично NT и ST са перпендикулярни и исканото следва.

Коментар. Първото решение е стандартно за типичните състезателни умения на българските състезатели през годините (и за подготовката тази година) и се основава на няколко основни момента: поговорката „Ako mi daš sredine, dam ti sredine!“ (която беше използвана едва от трима наши, като само двама построиха правилната среда), плюс задължителните вписани ъгли, вписани четириъгълници и еднакви триъгълници. Притеснителен е фактът, че при наличие на допирателна едва трима от състезателите ни използваха основното свойство на периферния ъгъл, а дори един от състезателите ни заяви, че не го знае! Това свойство носеше 1 т., което си е почти подарък, и същевременно неизползването му блокираше повечето възможни атаки.

Второто решение е красиво и без съществено допълнително построение, но трудно се намира – всъщност за съществуването му се разбра чак след състезанието от заместник-ръководителя на отбора на домакините, съответно никой от лидерите (които гласуват темата и знаят задачите предварително) не го беше забелязал. Все пак нашият глас беше против тази задача, понеже си имахме друго решение с подобие (с допълнително построение), което щеше

да даде повече възможности за противниците ни. Тук пък ще отбележим, че въпреки нарастващия обществен натиск, че материалът по математика в училище е много, България е почти единствената държава в региона, в която подобните триъгълници не са изучавани от учениците на тази възраст. Това винаги е било проблем при подготовките за МлБОМ, понеже едно е цяла година да си се упражнявал, и най-вече да си бил изпитван по даден материал, а друго е да го срещнеш две седмици преди състезанието.

Задача 3. Да се намерят всички четворки $(p; q; a; b)$ от естествени числа, като $a > 1$, p и q са прости и $p^a = 1 + 5q^b$.

Решение. Явно p и q са с различна четност и значи точно едно от тях е равно на 2.

Нека първо $p=2$. По модул 5 получаваме, че a се дели на 4, значи $2^a - 1$ се дели на 3, откъдето $q=3$. При $b=1$ следва $a=4$ и получаваме решението $(2; 3; 4; 1)$, а при $b \geq 2$ непременно $2^a - 1$ се дели на 9, откъдето a се дели на 6. Но тогава $5 \cdot 3^b = 2^a - 1$ се дели на 7, което е невъзможно.

Нека сега $q=2$. Първо ще разгледаме четно a . Ако p не е 3, то $5 \cdot 2^b = p^a - 1$ се дели на 3, противоречие. Значи $p=3$. При $b=4$ следва $a=4$ и получаваме решението $(3; 2; 4; 4)$. Директно се проверява, че $b \leq 3$ е невъзможно. Нека $b \geq 5$. По модул 32 пресмятаме, че непременно a се дели на 8. Пресмятаме $3^8 \equiv -1 \pmod{17}$ и значи $5 \cdot 2^b$ трябва да дава остатък 0 или 15 по модул 17 – обаче директна проверка през $b = 1, 2, \dots, 8$ (заедно с $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$) показва, че това е невъзможно.

При нечетно $a \geq 3$ в $5 \cdot 2^b = p^a - 1 = (p-1)(p^{a-1} + p^{a-2} + \dots + p + 1)$ вторият множител е по-голям от 5 поради $p^2 + p + 1 > 5$, така че непременно е четен, но е и сума на нечетен брой нечетни събираеми, което е невъзможно.

Коментар. Горното решение е различно от официалното и се основава на повече използване на модулна аритметика и по-малко разлагания. Всъщност всичките аргументи с модулната аритметика (т.е. без случая $q=2$, a – нечетно) бяха реализирани от наш представител, като и ние, и журито бяхме впечатлени от това колко далеч се стига само с умно използване на модули (7 от 10 точки). Поуката тук е да не се забравя, че в теория на числата думата „разлагане“ съществува. Едва трима от нашите участници се сетиха да разлагат $p^a - 1$ (за нечетно a има важно разлагане, а при четно a има дори лесно такова). Един от тях стигна до пълно решение, вторият беше по същество към края, но изгуби лесни точки от нелепа изчислителна грешка, а третият участник се пребори с трудната част (a – нечетно), но не се ориентира в лесната част (a – четно). Използването на „трудни“ модули (в горното решение – най-вече 17) може да се замени с лесни разлагания, но решихме да покажем решение с колкото се може повече модули с цел илюстрация на манипулации, които се срещат в подобни задачи. Въобще виждаме поредната задача по теория на числата, в която при достатъчна систематичност, прецизност и настойчивост решението няма как да убегне на състе-

зателя.

Задача 4. Четното естествено число n ще наричаме *яко*, ако множеството от естествените числа от 1 до n може да се разбие на $\frac{n}{2}$ двойки, като сборът на числата във всяка двойка е степен на 3. Например 6 е яко с разбиването (1, 2), (3, 6), (4, 5). Да се намери броят на яките естествени числа, по-малки от 3^{2022} .

Решение. Нека a_m е броят яки числа, по-малки от 3^m . Явно $a_1=1$. Търсим a_{2022} . Да разгледаме яко число x (т.е. ще работим с множеството от естествени-те от 1 до x) и нека естественото k е такова, че $3^k \leq x < 3^{k+1}$. Понеже x е в двойка с число, по-малко от него, единствената възможност за сумата им е 3^{k+1} , т.е.

другото число в двойката е $3^{k+1}-x$ и $x > \frac{3^{k+1}}{2} > 3^k$. Значи 3^k също е в двойка и понеже $3^{k+2}-3^k > 3^{k+1} > x$, сумата в тази двойка също трябва да е 3^{k+1} , т.е. 3^k е в двойка с $2 \cdot 3^k$; в частност, $x \geq 2 \cdot 3^k$.

Аналогично в интервала $[3^{k+1}-x; x]$ всяко число z е в двойка с $3^{k+1}-z$. Наистина, някое от двете числа надвишава $\frac{3^{k+1}}{2} > 3^k$, значи сумата им може да бъде само 3^{k+1} . Следователно или $3^{k+1}-x-1=0$, или числата от 1 до $3^{k+1}-x-1$ се разбиват на двойки, т.е. $3^{k+1}-x-1$ е яко. Обратно, ако $3^{k+1}-x-1=0$ или яко, то с двойките $(z; 3^{k+1}-z)$ получаваме, че x също е яко.

Ще получим рекурентна връзка за a_m . От една страна, броят на яките числа от $2 \cdot 3^m$ до $3^{m+1}-1$ включително е $a_{m+1}-a_m$. От друга страна, $3^{m+1}-1$ е яко (положете $k=m$ и $x=3^{m+1}-1$ в предния абзац), а всяко яко число x в интервала $[2 \cdot 3^m; 3^{m+1}-1]$ съответства на единствено яко число, ненадминаващо 3^m-1 (а именно числото $3^{m+1}-x-1$). Оттук $a_{m+1}-a_m=a_m+1$, т.е. $a_{m+1}=2a_m+1$ и с $a_1=1$ индуктивно следва $a_m=2^m-1$.

Коментар. Задачата отразява факт, който е споменат например в (Sloane) (коментар на Ray Chandler от 3.8.2004). Тя изисква опит с рекурсивни аргументи – в подготовката имаме една (чудесно направена) лекция в тази насока, която явно беше недостатъчна за преборването на тази задача от всички. Впрочем и при други лекции от подготовката беше подчертано, че в комбинаторни задачи винаги трябва да се има предвид индуктивният подход, който е способен да превърне задачата от (почти) невъзможна в (почти) очевидна. Освен това доста лесно е човек да изпусне дребни необходими детайли и да изгуби съществени точки – това се случи дори при държавата победител Румъния. Радостно е, че представихме едно почти пълно решение, което бе важно за златния медал на съответния състезател. Може да се забележи (и докаже с изводите от показаното решение), че всъщност яките числа са точно тези естествени числа, които в троичния си запис не съдържат цифрата 1 – ре-

шение, което доказваше това, бе приравнено на специална награда от журито.

В заключение следва да отбележим, че още през учебната година се забелязваше отстъпление в уменията на осмокласниците в математическите състезания спрямо очакваното ниво. Едно възможно обяснение е недостатъчно ефективното дистанционно обучение, съчетавано и с повече възможности за учениците да симулират дейност. При това с риск да станем непопулярни с изказания извод, по-слабите средни резултати спрямо предишни години се забелязват основно на момчетата (което почти сигурно е компенсирано от по-високите им резултати в компютърните игри) и като естествен резултат имаме основно дамски отбор (като момиче беше дори първата ни резерва). Следва да се добави обичайният проблем – фактът, че подобните триъгълници в България са извън материала за осми клас, а в повечето геометрични предложения за МлБОМ, особено напоследък, се използва подобие. Да не пропускаме и това, че задачите за доказване на неравенства са все по-настойчив елемент в състезанията на околните държави, включително при тазгодишните домакини, докато правилата на националните ни състезания затрудняват включването на такива задачи (в типичния формат с четири задачи първите две трябва да са по учебния материал и това почти автоматично ги задължава да са по алгебра и геометрия). Направените изводи следва да се отчетат в националните програми и при подготовката на националните състезания и отбори през следващите години, а не да си затваряме очите пред проблемите.

ЛИТЕРАТУРА

- КОРТЕЗОВ И., КАРЛОВ Е. & МАРИНОВ М., 2021. Подготовка за XXV младежка балканиада по математика 2021. *Математика и информатика*, Национално издателство „Аз-буки“, **64**(5), 483 – 486. ISSN 1310 – 2230 (Print), DOI: <https://doi.org/10.53656/math2021-5-2-pod>.
- КОРТЕЗОВ И., 2021. Подбор и участие на отбора на България в XXIV младежка балканиада по математика. *Математика и информатика*, Национално издателство „Аз-буки“, **64**(1), 8 – 23, ISSN:1310-2230.
- КОРТЕЗОВ И. & КАРЛОВ, Е., 2019. XXIII младежка балканиада по математика, Кипър 2019. *Математика*, **5**, 26 – 27.
- КОРТЕЗОВ, КАРЛОВ, ТОМОВА, 2018 XXII младежка балканиада по математика. *Математика*, **5**

REFERENCES

- KORTEZOV, KARLOV & MARINOV, 2021. Preparation for the XXV Junior Balkan Mathematical Olympiad 2021. *Mathematics and Informatics*, **64**(5), Az-buki National Publishing House, 2021, ISSN 1310 – 2230 (Print), DOI: <https://doi.org/10.53656/math2021-5-2-pod>, 483 – 486.
- KORTEZOV, 2021. Selection and participation of the team of Bulgaria at the XXIV Junior Balkan Mathematical Olympiad. *Mathematics and Informatics*, **64**(1), Az-buki National Publishing House, 2021, ISSN: 1310-2230, 8 – 23.
- KORTEZOV & KARLOV, E., 2019. XXIII Junior Balkan Mathematical Olympiad, Cyprus 2019. *Matematika*, **5**, 26 – 27.
- KORTEZOV, KARLOV & TOMOVA, 2018. XXII Junior Balkan Mathematical Olympiad. *Matematika*, **5**.
- SLOANE N.J.A., On-line Encyclopedia of Integer Sequences, <https://oeis.org/A005823>.

TWENTY-SIXTH JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

Abstract. The paper includes the contest paper of JBMO 2022 together with variants of the solutions of the problems, plus comments on them and on the results of the team. The materials included can be useful to the groups for preparation for junior high school math contests.

Keywords: math contests; JBMO, junior high school

✉ **Dr. Ivaylo Korteov, Assoc. Prof.**
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev St., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: kortezov@math.bas.bg
IMI/0104

✉ **Miroslav Marinov**
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev St., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: miri_plovdiv@abv.bg
IMI/0342