ДОПИРАТЕЛНИ ОКРЪЖНОСТИ, ПОРОДЕНИ ОТ ИНЦИДЕНТНИ ТОЧКА И ПРАВА

Сава Гроздев, Веселин Ненков

Резюме. Разгледани са твърдения, свързани с обобщението на една от задачите от Международната олимпиада по математика през 2011 г. Обърнато е специално внимание на доказателствата, като за опростяване на изчисленията са използвани инверсия и подходяща точка на Микел.

Keywords: THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP), triangle, circle, tangent point, Miquel point.

Съществуват математически твърдения, в които при вникване в детайлите от различни гледни точки се получават различни съдържателни обобщения. Освен това се забелязват нови свойства на добре известни обекти. Подходящ пример за такова твърдение е следната задача от 52-та международна математическа олимпиада през 2011 г.: *Нека l е допирателна към описаната окръжност Γ на остроъгълен триъгълник ABC. С l_a, l_b и l_c са означени симетричните прави на l съответно спрямо правите BC, CA и AB. Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника, образуван при пресичането на правите l_a, l_b и l_c, се допира до Γ.* (Гроздев, 2011)

Едно обобщение, в което е определена една забележителна точка за ΔABC, зависеща от произволна описана за ΔABC крива от втора степен, е направено в (Гроздев & Ненков, 2012). Тук ще разгледаме друго, по-различно обобщение на същата задача. За целта в началото ще отбележим друга нейна формулировка. Във връзка с това ще припомним две свойства на ортоцентъра H на ΔABC.

Нека k_a, k_b и k_c са описаните окръжности съответно за триъгълниците BCH, CAH и ABH. Ще потърсим някои връзки на тези окръжности с произволна допирателна l за Γ.

1) Симетричната точка на H спрямо правата BC лежи върху Γ (Паскалев & Чобанов, 1985). Следователно окръжността, симетрична на k_a спрямо BC, е

Γ. Затова, при симетрия спрямо BC, допирателната l на Γ се преобразува в допирателна l_a към k_a. По аналогичен начин забелязваме, че правите l_b и l_c, симетрични на l съответно спрямо CA и AB, са допирателни съответно към k_b и k_c.

2) Ако s е произволна права през H, а правите s_a, s_b и s_c са симетричните образи на s съответно спрямо правите BC, CA и AB, то s_a, s_b и s_c минават през точка P от Γ (Шарыгин, 1986) и (Прасолов, 1986). Затова при симетрия спрямо BC точката P се преобразува във втората пресечна точка H_a на k_a и s. Следователно, ако l е допирателната на Γ в точката P ($P = s_a \cap l$), правата l_a е допирателна на k_a в точката H_a. Аналогично установяваме, че ако вторите пресечни точки на s с k_b и k_c са съответно H_b и H_c, правите l_b и l_c се допират съответно до k_b и k_c в H_b и H_c.

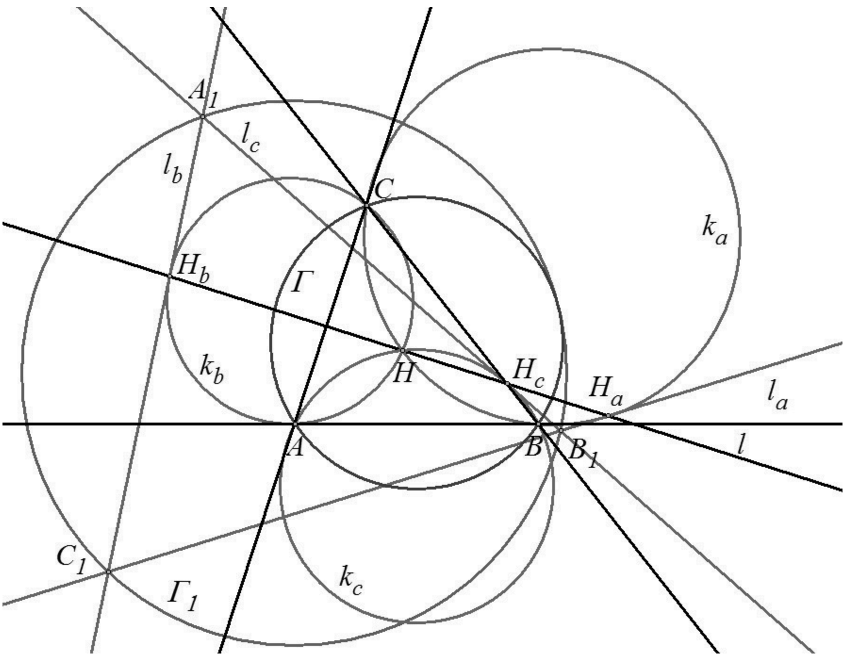
От направените наблюдения следва, че олимпиадната задача може да се формулира по следния по-различен начин:

Твърдение 1. *Нека H е ортоцентърът на не правоъгълен триъгълник ABC с описана окръжност Γ, а k_a, k_b и k_c са описаните окръжности съответно за триъгълниците BCH, CAH и ABH. Права l през H пресича тези окръжности за втори път съответно в точките H_a, H_b и H_c. Ако правите l_a, l_b и l_c са допирателни към k_a, k_b и k_c съответно в точките H_a, H_b и H_c, то описаната окръжност около триъгълника, образуван при пресичането на l_a, l_b и l_c, се допира до Γ.*

Забележка: Във формулировката на твърдение 1 сме се отказали от ограничението ΔABC да е остроъгълен, но сме наложили друго – да не е правоъгълен. Ако $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, то $H \equiv C$, а k_a и k_b не са определени с три различни точки. Затова изключваме правоъгълните триъгълници.

Сега по естествен начин възниква следният въпрос: Какво ще се случи, ако ортоцентърът H се замени с произволна точка H в равнината на произволен триъгълник ABC? Тук можем да ускорим придвижването от зададения въпрос до получаване на неговия отговор във вид на хипотеза, като използваме конструктивните и динамични възможности на програмата „THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP). Наблюденията с GSP показват, че твърдение 1 остава вярно и при произволна точка H. Като вземем предвид забележката към твърдение 1, лесно съобразяваме, че ако точката H лежи върху някоя от правите BC, CA и AB или върху Γ, разглежданата конструкция не е коректна. Така вече можем да формулираме обобщение на твърдение 1, а следователно и на олимпиадната задача, в следния вид:

Твърдение 2. *Нека H е точка от равнината на триъгълник ABC с описана окръжност Γ, която не лежи върху BC, CA, AB и Γ, а k_a, k_b и k_c са описаните окръжности съответно за триъгълниците BCH, CAH и ABH. Права l през H пресича тези окръжности за втори път съответно в точките H_a, H_b и H_c. Ако правите l_a, l_b и l_c са допирателни към k_a, k_b и k_c съответно в точките H_a, H_b и H_c, то описаната окръжност Γ_1 около триъгълника, образуван при пресичането на l_a, l_b и l_c, се допира до Γ.* (Фиг. 1)

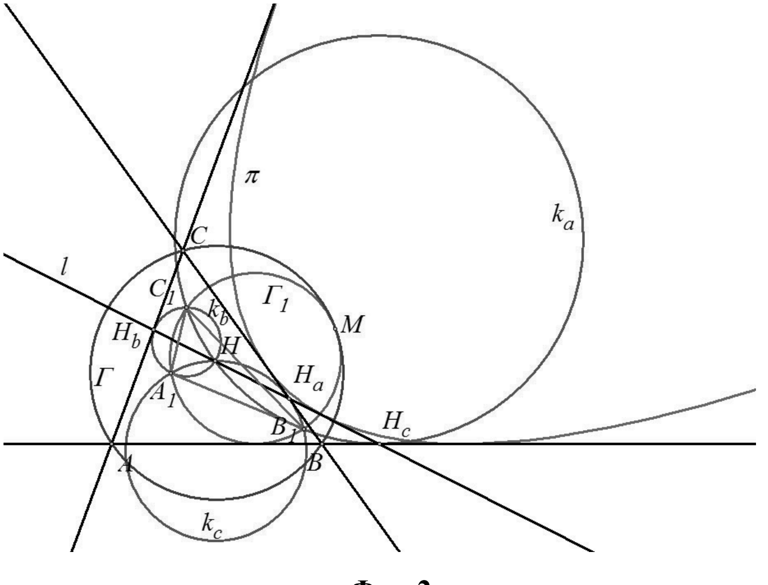


Фиг. 1

Тъй като точката H и правата l през нея са произволни, аналитичните подходи за доказателство на твърдение 2 водят до прекалено големи усложнения в пресмятанията и получаваните чрез тях резултати. Затова е по-добре да използваме индиректен подход при доказателството на твърдение 1, подход, при който някои от пресмятанията могат да се опросят съществено.

Разглеждаме инверсия i с полюс H и степен r^2 ($r \in \mathbb{R}^+$). При тази инверсия окръжностите k_a, k_b и k_c се преобразуват съответно в правите k'_a, k'_b и k'_c, неминаващи през H, а правата l – в себе си. Тъй като $k_b \cap k_c = A \neq H$, $k_c \cap k_a = B \neq H$ и $k_a \cap k_b = C \neq H$, то при i тези точки се преобразуват съответно в $A' = k'_b \cap k'_c$, $B' = k'_c \cap k'_a$ и $C' = k'_a \cap k'_b$, т.е. $k'_a \equiv B'C'$, $k'_b \equiv C'A'$ и $k'_c \equiv A'B'$. Следователно при i точките $H_a = l \cap k_a$, $H_b = l \cap k_b$ и $H_c = l \cap k_c$ се преобразуват съответно в точките $H'_a = l \cap B'C'$, $H'_b = l \cap C'A'$ и $H'_c = l \cap A'B'$, т.е. H'_a, H'_b и H'_c са пресечните точки на l с правите, образуващи триъгълника $A'B'C'$. Инверсните образи на допирателните l_a, l_b и l_b са съответно окръжностите l'_a, l'_b и l'_c, минаващи през H и допиращи се съответно до $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ в точките H'_a, H'_b и H'_c. Следователно образът на Γ_1 е окръжността Γ'_1, минаваща през пресечните точки на l'_a, l'_b и l'_c, различни от H. Като вземем предвид тези наблюдения и променим означенията, инверсията i преобразува твърдение 2 в следното:

Твърдение 3. *Дадени са триъгълник ABC с описана окръжност Γ, точка H и права l през H, неминаваща през никой от върховете на ABC. Окръжностите k_a, k_b и k_c са такива, че съдържат H и се допират съответно до BC, CA и AB в точките $H_a = l \cap BC$, $H_b = l \cap CA$ и $H_c = l \cap AB$. Ако вторите пресечни точки на двойките окръжности (k_b, k_c), (k_c, k_a) и (k_a, k_b) са съответно A_1, B_1 и C_1, то окръжността Γ_1, описана около $\Delta A_1B_1C_1$, се допира до Γ.* (Фиг. 2)



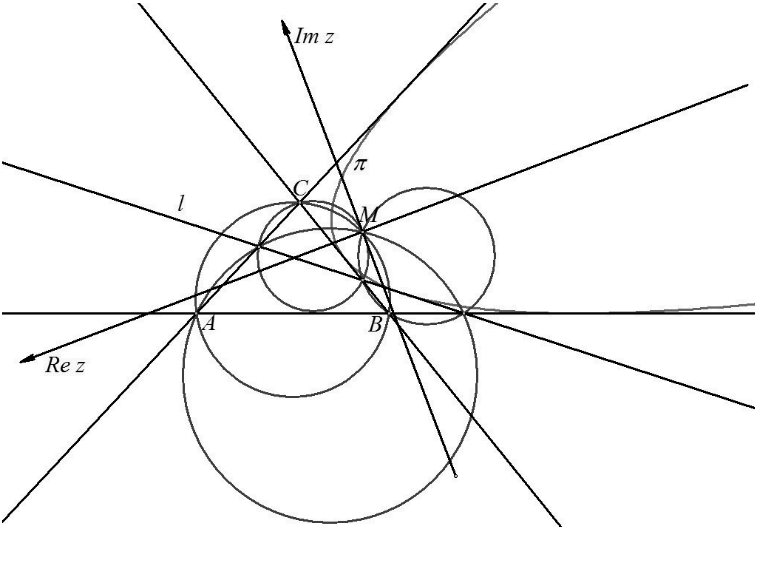
Фиг. 2

Оказва се, че прекият подход към доказване на това твърдение също води до съществени изчислителни проблеми. Затова с помощта на GSP ще направим още няколко наблюдения върху геометричната конфигурация, описана в твърдение 3.

Нека правата l е фиксирана, а точката H се движи по нея. Съответните наблюдения с GSP показват, че окръжността Γ_1 се променя с изменението на точката H, но винаги минава през една постоянна точка M. Следователно, допирната точка M на Γ и Γ_1 зависи от положението на правата l спрямо ΔABC, но не зависи от положението на H върху l. След като точката M зависи само от правите BC, CA, AB и l, то възниква въпросът: Коя е тази точка? Точка, която е характерна за четири прави в общо положение, е така наречената точка на Микел. Това е точката, в която се пресичат четирите окръжности, описани за четирите триъгълника, получаващи се при пресичането на дадените четири прави (Фиг. 3). Проверката с GSP показва, че наистина постоянната точка M при фиксирана права l е точката на Микел, определена от правите BC, CA, AB и l. По този начин получаваме следното:

Следствие 1. *Ако в твърдение 3 правата l е постоянна, то окръжностите Γ и Γ_1 се допират в точката на Микел M, определена от правите BC, CA, AB и l, за произволна точка H от l.*

Сега, като вземем предвид следствие 1, можем да конструираме такова доказателство на твърдение 3, което е същевременно доказателство и на след-



Фиг. 3

ствие 1, че аналитичните пресмятания да не бъдат свързани с прекалено сложни изчисления. За целта да вземем предвид, че до четирите прави BC, CA, AB и l се допира единствена парабола π, която има за фокус точката на Микел M (Ненков, 1999) (Фиг. 3). Така задачата за аналитичното определяне на основните обекти, участващи в условието на твърдение 3, може да се параметризира, както е показано в (Ненков, 1998).

Разглеждаме геометричната конфигурация, описана в твърдение 3, в комплексната равнина спрямо Гаусова координатна система, както това е показано на фиг. 3. Спрямо тази координатна система, както е показано в (Ненков, 1998), афиксът на произволна точка Z от параболата π, допираща се до правите AB, BC, CA и l, е $z=\dfrac{2p}{(1+t)^2}$, $|t|=1$ (p е фокалният параметър на π). Нека допирните точки на правите AB, BC, CA и l с π се получават съответно при $t=t_1$, $t=t_2$, $t=t_3$ и $t=t_4$, допирната точка на втората допирателна през H се получава при $t=t_0$. Тогава от резултатите в (Ненков, 1998) се получават равенствата (афиксите на точките ще означаваме със съответните малки букви):

$$(1)\qquad a=\frac{2p}{(1+t_2)(1+t_3)},\quad b=\frac{2p}{(1+t_3)(1+t_1)},\quad c=\frac{2p}{(1+t_1)(1+t_2)},$$
$$h=\frac{2p}{(1+t_4)(1+t_0)},\quad h_a=\frac{2p}{(1+t_1)(1+t_4)},\quad h_b=\frac{2p}{(1+t_2)(1+t_4)},\quad h_c=\frac{2p}{(1+t_3)(1+t_4)},$$

където $|t_j|=1$.

Преминаваме към определяне на центъра O_a на k_a. Тъй като k_a се допира до BC в H_a, то $O_aH_a \perp BC$ и затова е изпълнено равенството $(b-c)(\overline{o}_a-\overline{h}_a)+(\overline{b}-\overline{c})(o_a-h_a)=0$ (Тонов, 1988). След като заместим необходимите резултати от (1) и извършим някои преобразувания, получаваме

$$(2)\qquad \overline{o}_a-t_1o_a=\frac{2pt_1(t_4-1)}{(1+t_1)(1+t_4)}.$$

Нека M_a е средата на HH_a. Тогава от (1) следва, че $m_a=\dfrac{p(2+t_0+t_1)}{(1+t_0)(1+t_1)(1+t_4)}$.

Тъй като O_a лежи върху симетралата на HH_a, изпълнено е равенството

$\left(h-h_a\right)\left(\overline{o}_a-\overline{m}_a\right)+\left(\overline{h}-\overline{h}_a\right)\left(o_a-m_a\right)=0$ (Тонов, 1988). Сега от израза за m_a и (1) получаваме

$$(3)\qquad -\overline{o}_a+t_4o_a=\frac{2pt_4\left(1-t_0t_1\right)}{\left(1+t_0\right)\left(1+t_1\right)\left(1+t_4\right)}.$$

От (2) и (3) имаме:

$$(4)\quad o_a=\frac{2p\left[t_1\left(t_4-t_0-1\right)+t_4\right]}{\left(1+t_0\right)\left(1+t_1\right)\left(1+t_4\right)\left(t_4-t_1\right)},\ \overline{o}_a=\frac{2pt_1t_4\left[t_0\left(t_4-t_1-1\right)+t_4\right]}{\left(1+t_0\right)\left(1+t_1\right)\left(1+t_4\right)\left(t_4-t_1\right)}.$$

Уравнението на k_a получаваме от равенството $\left|z-o_a\right|^2=\left|h_a-o_a\right|^2$, което се записва още така: $z\overline{z}-\overline{o}_az-o_a\overline{z}+\overline{o}_ah_a+o_a\overline{h}_a-h_a\overline{h}_a=0$. След като използваме (1) и (4) за уравнението на k_a, намираме

$$(5)\quad k_a:\ \begin{aligned}&z\overline{z}-\frac{2pt_1t_4\left[t_4\left(1+t_0\right)-t_0\left(1+t_1\right)\right]}{\left(1+t_0\right)\left(1+t_1\right)\left(1+t_4\right)\left(t_4-t_1\right)}z-\\&-\frac{2p\left[t_1\left(t_4-t_0-1\right)+t_4\right]}{\left(1+t_0\right)\left(1+t_1\right)\left(1+t_4\right)\left(t_4-t_1\right)}\overline{z}+\frac{4p^2t_1t_4\left(t_4-t_0\right)}{\left(1+t_0\right)\left(1+t_1\right)\left(1+t_4\right)^2\left(t_4-t_1\right)}=0.\end{aligned}$$

Уравненията на k_b и k_c се получават от уравнението (5) на k_a, като t_1 се замени съответно с t_2 и t_3. След като извадим уравненията на k_a и k_b и извършим някои преобразувания, стигаме до равенството:

$$\overline{z}=-\frac{t_4^2\left[t_1t_2-t_0\left(t_1+t_2\right)+t_0t_4+t_4-t_0\right]}{\left(t_4-t_0-1\right)t_1t_2+t_4\left(t_1+t_2\right)-t_0t_4}z+\frac{2pt_4\left(t_4-t_0\right)\left(t_1t_2+t_4\right)}{\left(1+t_4\right)\left[\left(t_4-t_0-1\right)t_1t_2+t_4\left(t_1+t_2\right)-t_0t_4\right]}.$$

Заместваме последния израз в (5) и получаваме квадратното уравнение

$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, където $\alpha=-\dfrac{t_4^2\left[t_1t_2-t_0\left(t_1+t_2\right)+t_0t_4+t_4-t_0\right]}{\left(t_4-t_0-1\right)t_1t_2+t_4\left(t_1+t_2\right)-t_0t_4}$,

$\gamma=-\dfrac{4p^2t_4^2\left(t_1-t_4\right)\left(t_0-t_4\right)}{\left(1+t_0\right)\left(1+t_4\right)^2\left[\left(t_4-t_0-1\right)t_1t_2+t_4\left(t_1+t_2\right)-t_0t_4\right]}$, а β е комплексно число, зависещо от t_0, t_1, t_2 и t_4. Тъй като k_a и k_b се пресичат в точките H и C_1, то корените на последното уравнение са h и c_1. Сега от формулата на Виет за произведението на корените на едно квадратно уравнение, приложена към последното уравнение, следва, че $h.c_1 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{4p^2\left(t_4 - t_0\right)}{\left(1+t_0\right)\left(1+t_4\right)^2\left[t_1t_2 - t_0\left(t_1+t_2\right)+t_0t_4+t_4-t_0\right]}$.

След заместване на h от (1) окончателно получаваме

$$(6) \qquad c_1 = \frac{2p\left(t_4 - t_0\right)}{\left(1+t_4\right)\left[t_1t_2 - t_0\left(t_1+t_2\right)+t_0t_4+t_4-t_0\right]}.$$

Аналогично на (6) стигаме до равенствата:

$$(7) \qquad a_1 = \frac{2p\left(t_4 - t_0\right)}{\left(1+t_4\right)\left[t_2t_3 - t_0\left(t_2+t_3\right)+t_0t_4+t_4-t_0\right]},$$

$$b_1 = \frac{2p\left(t_4 - t_0\right)}{\left(1+t_4\right)\left[t_3t_1 - t_0\left(t_3+t_1\right)+t_0t_4+t_4-t_0\right]}.$$

Сега да определим уравнението на окръжността, минаваща през точките M, A_1 и B_1 от равенството $\dfrac{a_1 - z}{b_1 - z}.\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{\overline{a}_1 - \overline{z}}{\overline{b}_1 - \overline{z}}.\dfrac{\overline{a}_1}{\overline{b}_1}$, като в него заместим (7). След извършване на необходимите преобразувания получаваме, че уравнението на описаната за ΔMA_1B_1 окръжност е следното:

$$(8) \qquad \Gamma_1 : \begin{array}{l} \left(1+t_4\right)\left[\left(t_0 - t_4 + 1\right)t_1t_2t_3 - t_4\left(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1\right)+t_0t_4\left(t_1+t_2+t_3\right)\right]z\overline{z} + \\ +2pt_1t_2t_3t_4\left(t_4 - t_0\right)z + 2pt_4\left(t_4 - t_0\right)\overline{z} = 0. \end{array}$$

След заместване на (6) в (8) установяваме, че точката C_1 лежи върху Γ_1. Освен това в [6] е намерено уравнението на Γ във вида:

$$(9) \qquad \Gamma : \left(1+t_1\right)\left(1+t_2\right)\left(1+t_3\right)z\overline{z} - 2pt_1t_2t_3z - 2p\overline{z} = 0.$$

Съвместното решаване на уравненията (8) и (9) води до единственото решение $z = 0$. Следователно Γ и Γ_1 се допират в точката на Микел M. С това твърдение 3 и следствие 1 са доказани.

Сега, като вземем предвид, че твърдение 2 е инверсно на твърдение 3, получаваме и неговото доказателство. Освен това от следствие 1 намираме:

Следствие 2. *Ако в твърдение 2 правата* l *е постоянна, то окръжностите* Γ *и* Γ_1 *се допират в постоянна точка за произволна точка* H *от* l.

Тук трябва да се отбележи, че постоянната точка в следствие 2, за разлика от следствие 1, не е характерната за тази геометрична конфигурация точка на Микел. Това се проверява непосредствено, като се направят необходимите построения в GSP.

Накрая е необходимо да отбележим, че намереното във връзка с твърдение 2, твърдение 3 и неговото следствие 1 ни предлага още едно свойство на точката на Микел, определена от четири прави в общо положение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С. (2011). Международна олимпиада по математика. *Математика плюс, 3 (75)*, 56–59.
2. Гроздев, С. & Ненков, В. (2012). Една забележителна точка на триъгълника. *Математика и математическо образование, 41,* 330–337.
3. Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник. *Математика и информатика, 5*, 54 – 59.
4. Ненков, В. (1999). Парабола, вписана в триъгълник. *Математика и информатика, 4,* 61 – 65.
5. Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
6. Прасолов, В. (1986). *Задачи по планиметрии. Част I*. Москва: Наука, 154, зад. 9.23.
7. Тонов, И. (1988). *Приложение на комплексните числа в геометрията*. София: Народна просвета.
8. Шарыгин, И. (1986). *Задачи по геометрии. Планиметрия*. Москва: Наука, 52, зад. 139.

✉ Сава Гроздев
професор, доктор по математика, доктор на педагогическите науки
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев", бл. 8
1113 София, България
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков Ненков
доктор по математика
Технически колеж Ловеч
ул. „Съйко Съев" № 31
Ловеч
E-mail: vnenkov@mail.bg

TANGENT CIRCLES, GENERATED BY AN INCIDENT POINT AND A LINE

Abstract. Some assertions are considered in connection with the generalization of a problem from the International Mathematical Olympiad in 2011. Special notice is taken of the proofs. Inversion and a suitable Miquel point are used to simplify the computing process.

✉ Sava Grozdev
Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Veselin Nenkov
Doctor in Mathematics
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street
Lovech
E-mail: vnenkov@mail.bg