

## ДОКАЗАТЕЛСТВА И УТОЧНЕНИЯ НА ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ПОЛУЧЕНИТЕ ТВЪРДЕНИЯ ЧРЕЗ ПРИНЦИПА ЗА ДУАЛНОСТ

<sup>1)</sup>Сава Гроздев, <sup>2)</sup>Веселин Ненков

<sup>1)</sup> Висше училище по застраховане и финанси – София

<sup>2)</sup> Технически колеж – Ловеч

**Резюме.** В статията са доказани свойствата, които характеризират геометричните конструкции, описани в (Grozdev & Nenkov, 2017). Предложените доказателства водят до уточнения на някои от свойствата, формулирани в (Grozdev & Nenkov, 2017).

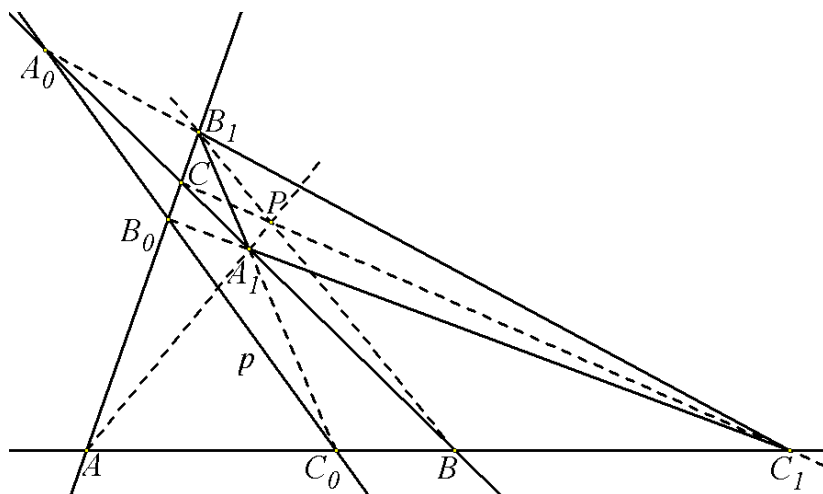
*Keywords:* triangle; centroid; circumcurve; Euler curve; Euler line

В (Grozdev & Nenkov, 2017) с помощта на динамичните възможности на програмата THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP) и логиката на принципа за дуалност в равнината на триъгълник без доказателства са описани конструкциите на едно изображение между точки и прави и една крива, зависеща от права. Тук ще докажем свойствата на изображението и кривата, формулирани в (Grozdev & Nenkov, 2017). За целта разглеждаме произволен триъгълник  $ABC$ , спрямо който ще използваме барицентрични координати, като  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$  и  $C(0,0,1)$  (Paskalev & Chobanov, 1985).

**1. Аналитични изрази, свързани с изображението  $\varphi$ .** Нека  $P(x_p, y_p, z_p)$  е крайна ( $x_p + y_p + z_p = 1$ ) или безкрайна ( $x_p + y_p + z_p = 0$ ) точка в равнината на  $\triangle ABC$ , която не лежи върху никоя от правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Ако  $A_1 = PA \cap BC$ ,  $B_1 = PB \cap CA$  и  $C_1 = PC \cap AB$  (фиг. 1), то

$$(1) A_1 \left( 0, \frac{y_p}{y_p + z_p}, \frac{z_p}{y_p + z_p} \right), B_1 \left( \frac{x_p}{z_p + x_p}, 0, \frac{z_p}{z_p + x_p} \right), C_1 \left( \frac{x_p}{x_p + y_p}, \frac{y_p}{x_p + y_p}, 0 \right).$$

След това намираме, че координатите на точките  $A_0 = BC \cap B_1C_1$ ,  $B_0 = CA \cap C_1A_1$  и  $C_0 = AB \cap A_1B_1$  (фиг. 1) са следните:



Фигура 1

$$(2) A_0\left(0, \frac{y_p}{y_p - z_p}, \frac{z_p}{z_p - y_p}\right), B_0\left(\frac{x_p}{x_p - z_p}, 0, \frac{z_p}{z_p - x_p}\right), C_0\left(\frac{x_p}{x_p - y_p}, \frac{y_p}{y_p - x_p}, 0\right).$$

От (Paskalev & Chobanov, 1985) е известно, че точките  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $P_3(x_3, y_3, z_3)$  лежат на една права тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$(3) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Като приложим (3) към координатите на точките  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$ , получаваме, че те лежат на една права  $p$  (фиг. 1), чието уравнение е следното:

$$(4) p: y_p z_p x + z_p x_p y + x_p y_p z = 0.$$

Така получаваме едно доказателство на известната теорема на Дезарг за перспективните триъгълници (Mateev, 1977).

С помощта на уравнението (4) получаваме единствена права  $p$ , която е съответна на точката  $P(x_p, y_p, z_p)$  при изображение  $\varphi$  в равнината на  $\Delta ABC$ . Ако  $P$  съвпада с медицентъра  $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  на  $ABC$ , от (4) следва, че  $\varphi(P)$  е безкрайната права на равнината. Обратно, ако  $p: ux + vy + wz = 0$  е права (неминаваща през никой от върховете  $A$ ,  $B$  и  $C$ ) в равнината на

$\Delta ABC$ , чрез равенствата  $y_P z_P = u$ ,  $z_P x_P = v$  и  $x_P y_P = w$  еднозначно определяме точка  $P$ , координатите на която са следните:

$$(5) \quad P\left(\frac{vw}{vw+wu+uv}, \frac{wu}{vw+wu+uv}, \frac{uv}{vw+wu+uv}\right).$$

Когато  $P$  е безкрайна, изпълнено е равенството  $uv + vw + wu = 0$ . В този случай за координатите имаме  $P(vw, wu, uv)$ . Така същото изображение  $\varphi$  съпоставя на правата  $p: ux + vy + wz = 0$  еднозначно точка  $P$ , чиито координати се получават чрез (5). Ако  $P$  е безкрайна точка, правата  $p = \varphi(P)$  е такава, че  $vw + wu + uv = 0$ . Освен това за координатите на  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  имаме следното изразяване:

$$(6) \quad A_0\left(0, \frac{w}{w-v}, \frac{v}{v-w}\right), B_0\left(\frac{w}{w-u}, 0, \frac{u}{u-w}\right), C_0\left(\frac{v}{v-u}, \frac{u}{u-v}, 0\right).$$

Ако  $C'(c_1, c_2, 0)$  ( $c_1 + c_2 = 1$ ) е точка от правата  $AB$  (различна от  $A$  и  $B$ ), произволна права  $p'$  през  $C'$  има следното уравнение  $p': v'c_2x - v'c_1y - w'c_1z = 0$ . След прилагане на формулите (5) получаваме, че точката  $P'$ , съответна на  $p'$  при  $\varphi$ , има следното координатно представяне:

$$P'\left(\frac{w'c_1}{w'(c_1-c_2)-v'c_2}, \frac{w'c_2}{w'(c_2-c_1)+v'c_2}, \frac{v'c_2}{w'(c_2-c_1)+v'c_2}\right).$$

Аналогично образът на права  $p'': v''c_2x - v''c_1y - w''c_1z = 0$  през  $C'$  е точката

$$P''\left(\frac{w''c_1}{w''(c_1-c_2)-v''c_2}, \frac{w''c_2}{w''(c_2-c_1)+v''c_2}, \frac{v''c_2}{w''(c_2-c_1)+v''c_2}\right).$$

Сега чрез (3) намираме, че точките  $P'$  и  $P''$  лежат на права  $p_1$  с уравнение  $p_1: c_2x + c_1y = 0$ . От това уравнение следва, че точките  $P'$  и  $P''$  лежат на постоянна права  $p_1$ , минаваща през  $C$ . Ако  $C'$  е средата на  $AB$ , правата  $p_1$  е успоредна на  $AB$ .

Нека сега  $q: ux + vy = 0$  е права през върха  $C$ . Тогава точката  $Q'\left(-\frac{v}{u}y', y', z'\right)$  лежи върху  $q$ . От (4) следва, че правата  $q'$ , съответна на точката  $Q'$  при  $\varphi$ , има следното уравнение  $q': uz'x - vz'y - vy'z = 0$ . Ако  $C'' = q' \cap AB$ , то  $C''\left(\frac{v}{u+v}, \frac{u}{u+v}, 0\right)$ . Това означава, че образът на всяка точка от  $q$  има за образ при  $\varphi$  права, която минава през постоянната точка  $C''$ . Ако  $q \parallel AB$ , то  $u = v = 1$  и  $C''$  е средата на  $AB$ .

Проведените разсъждения доказват, че съответствието  $\varphi$  притежава следните свойства:

1) съответните точки  $P = \varphi(p)$  на всички прави  $p$ , минаващи през постоянна точка  $C'$  от правата  $AB$ , лежат на една права през  $C$ ;

2) съответните прави  $q = \varphi(Q)$  на всички точки  $Q$ , лежащи на права през  $C$ , минават през постоянна точка  $C''$  от правата  $AB$ .

Тези свойства показват как може да се допълни изображението  $\varphi$ , така че да съпоставя взаимно еднозначно точките от  $AB$  и правите през  $C$ . Аналогично стоят нещата и с другите два върха на  $\Delta ABC$ .

Преди да преминем към описване на кривата на Ойлер за права спрямо  $\Delta ABC$  и нейните свойства, ще изведем уравнението на крива, вписана в  $\Delta ABC$  и допираща се до две прави, различни от  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ .

**2. Крива, допираща се до страните на координатния триъгълник и две прави.** Нека кривата  $k : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0$  се допира до правите  $BC : x = 0$ ,  $CA : y = 0$ ,  $AB : z = 0$ ,  $l_1 : u_1x + v_1y + w_1z = 0$  и  $l_2 : u_2x + v_2y + w_2z = 0$ , съответно в точките  $A_1, B_1, C_1, L_1$  и  $L_2$ .

Общите точки на  $k$  и  $BC$  удовлетворяват уравнението  $a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$ . Тъй като  $BC$  се допира до  $k$ , от последното уравнение следва, че за координатите  $y$  и  $z$  на допирната точка  $A_1$  са изпълнени равенствата  $\frac{y}{z} = -\frac{a_{23}}{a_{22}}$  и  $\frac{z}{y} = -\frac{a_{23}}{a_{33}}$ .

Аналогично за допирните точки  $B_1$  и  $C_1$  получаваме съответно двойките равенства  $\frac{z}{x} = -\frac{a_{31}}{a_{33}}$ ,  $\frac{x}{z} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}$  и  $\frac{x}{y} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$ ,

$\frac{y}{x} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ . Правите  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  минават през една точка  $P(x, y, z)$ .

Ако  $\frac{BA}{CA}, \frac{CB_1}{AB_1} = k_b$  и  $\frac{AC_1}{BC_1} = k_c$ , то координатите на  $P$  са свързани с

числата  $k_a, k_b$  и  $k_c$  чрез равенствата  $k_a = -\frac{y}{z}$ ,  $k_b = -\frac{z}{x}$  и  $k_c = -\frac{x}{y}$  (Paskalev & Chobanov, 1985).

Като комбинираме тези равенства с предишните шест, получаваме  $a_{22} = k_a a_{23}$ ,  $a_{33} = \frac{1}{k_a} a_{23}$ ,  $a_{33} = k_b a_{31}$ ,  $a_{11} = \frac{1}{k_2} a_{31}$ ,  $a_{11} = k_3 a_{12}$

и  $a_{22} = \frac{1}{k_3} a_{12}$ . Оттук и теоремата на Чева, изразяваща се с равенството  $k_a k_b k_c = -1$  (Paskalev & Chobanov, 1985), следват зависимостите  $\frac{1}{k_3} = -\frac{1}{k_a k_b}$ ,

$a_{22} = \frac{1}{k_c} a_{12}$ ,  $a_{33} = k_b^2 k_c a_{12}$ ,  $a_{23} = -k_b a_{12}$  и  $a_{31} = k_b k_c a_{12}$ . След заместване на тези равенства в уравнението на  $k$  получаваме

$$(7) \quad k : k_c^2 x^2 + y^2 + k_b^2 k_c^2 z^2 + 2k_c xy - 2k_b k_c yz + 2k_b k_c^2 zx = 0$$

От равенствата  $x + y + z = 1$  и  $u_i x + v_i y + w_i z = 0$  намираме  $y = \frac{(w_i - u_i)x - w_i}{v_i - w_i}$  и  $z = \frac{(u_i - v_i)x + v_i}{v_i - w_i}$  ( $i = 1, 2$ ). След заместване на тези равенства в (7) се получава:

$$(8) \quad \begin{aligned} & \left[ (k_b k_c + 1) u_i^2 + k_c^2 (k_b - 1)^2 v_i^2 + (k_c - 1)^2 w_i^2 - 2k_c (k_b^2 k_c - k_b k_c + k_b + 1) u_i v_i + \right. \\ & \left. + 2k_c (k_b k_c + k_b - k_c + 1) v_i w_i - 2(k_b k_c^2 + k_b k_c - k_c + 1) w_i u_i \right] x^2 + \\ & \left. + \left[ 2k_b k_c (k_b k_c + 1) u_i v_i - 2k_c (k_2 k_3 + 2k_2 + 1) v_i w_i + 2(k_b k_c + 1) w_i u_i - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2k_b k_c^2 (k_b - 1) v_i^2 + 2(k_c - 1) w_i^2 \right] x + (k_b k_c v_i + w_i)^2 = 0. \end{aligned}$$

Дискриминантата на уравнение (8) е  $k_b k_c^2 (v_i - w_i)^2 (k_b k_c u_i v_i - k_c v_i w_i + w_i u_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Правата  $l_i$  е допирателна за  $k$  тогава и само тогава, когато  $k_b k_c u_i v_i - k_c v_i w_i + w_i u_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ). Отгук  $k_b = \frac{w_i (k_c v_i - u_i)}{k_c u_i v_i}$  ( $i = 1, 2$ ). Зато-

ва  $k_b = \frac{w_1 (k_c v_1 - u_1)}{k_c u_1 v_1} = \frac{w_2 (k_c v_2 - u_2)}{k_c u_2 v_2}$ . Следователно  $k_c = -\frac{u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1)}{v_1 v_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1)}$

и  $k_b = -\frac{w_1 w_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1)}$ . Сега заместваме тези равенства в (7) и получа-

ваме, че кривата  $k$  има следното уравнение

$$(9) \quad k : \begin{aligned} & u_1^2 u_2^2 (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 x^2 + v_1^2 v_2^2 (w_1 u_2 - w_2 u_1)^2 y^2 + w_1^2 w_2^2 (u_1 v_2 - u_2 v_1) z^2 + \\ & + 2u_1 u_2 v_1 v_2 (u_1 w_2 - u_2 w_1) (v_1 w_2 - v_2 w_1) xy + 2v_1 v_2 w_1 w_2 (v_1 u_2 - v_2 u_1) (w_1 u_2 - w_2 u_1) yz + \\ & + 2w_1 w_2 u_1 u_2 (w_1 v_2 - w_2 v_1) (u_1 v_2 - u_2 v_1) zx = 0. \end{aligned}$$

След решаване на системите, образувани от ( ) и уравненията на правите  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ ,  $l_1$  и  $l_2$ , определяме координатите на допирните точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $L_1$  и  $L_2$  във вида:

$$(10) \quad \begin{aligned} & A_1 \left( 0, \frac{w_1 w_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_1 v_2 w_2 (v_1 - w_1) - u_2 v_1 w_1 (v_2 - w_2)}, \frac{v_1 v_2 (u_1 w_2 - u_2 w_1)}{u_1 v_2 w_2 (v_1 - w_1) - u_2 v_1 w_1 (v_2 - w_2)} \right), \\ & B_1 \left( \frac{w_1 w_2 (v_1 u_2 - v_2 u_1)}{v_1 w_2 u_2 (w_1 - u_1) + v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2)}, 0, \frac{u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1)}{v_1 w_2 u_2 (w_1 - u_1) + v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2)} \right), \\ & C_1 \left( \frac{v_1 v_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1)}{w_1 u_2 v_2 (u_1 - v_1) - w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}, \frac{u_1 u_2 (w_1 v_2 - w_2 v_1)}{w_1 u_2 v_2 (u_1 - v_1) - w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{L_1} &= \frac{u_2 v_1 w_1 (v_1 w_2 - v_2 w_1)}{u_1^2 v_2 w_2 (v_1 - w_1) + v_1^2 w_2 u_2 (w_1 - u_1) + w_1^2 u_2 v_2 (u_1 - v_1)}, \\
 y_{L_1} &= \frac{v_2 w_1 u_1 (w_1 u_2 - w_2 u_1)}{u_1^2 v_2 w_2 (v_1 - w_1) + v_1^2 w_2 u_2 (w_1 - u_1) + w_1^2 u_2 v_2 (u_1 - v_1)}, \\
 z_{L_1} &= \frac{w_2 u_1 v_1 (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_1^2 v_2 w_2 (v_1 - w_1) + v_1^2 w_2 u_2 (w_1 - u_1) + w_1^2 u_2 v_2 (u_1 - v_1)}, \\
 x_{L_2} &= -\frac{u_1 v_2 w_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1)}{u_2^2 v_1 w_1 (v_2 - w_2) + v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2) + w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}, \\
 y_{L_2} &= -\frac{v_1 w_2 u_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1)}{u_2^2 v_1 w_1 (v_2 - w_2) + v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2) + w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}, \\
 z_{L_2} &= -\frac{w_1 u_2 v_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_2^2 v_1 w_1 (v_2 - w_2) + v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2) + w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}.
 \end{aligned}
 \tag{11.1}$$

$$\tag{11.2}$$

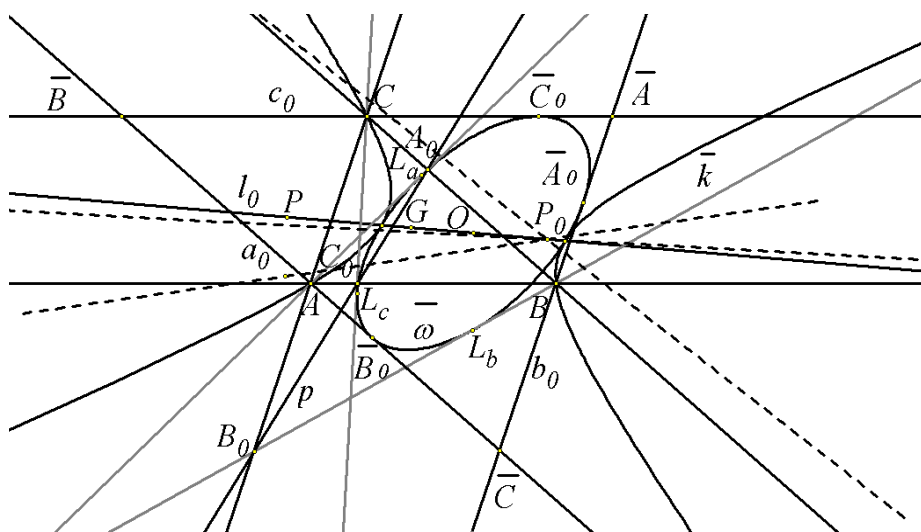
Накрая ще определим координатите  $(x_0, y_0, z_0)$  на центъра на  $k$ . Както е показано в (Grozdev & Nenkov, 2015), тези координати са решение на системата уравнения:

$$\begin{cases}
 (a_{11} - a_{31})x + (a_{12} - a_{23})y + (a_{31} - a_{33})z = 0, \\
 (a_{12} - a_{31})x + (a_{22} - a_{23})y + (a_{23} - a_{33})z = 0, \\
 x + y + z = 1.
 \end{cases}$$

След решаване на тази система за уравнението (9) получаваме формулите:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -\frac{u_1 v_2 w_2 (v_1 - w_1) - u_2 v_1 w_1 (v_2 - w_2)}{2[u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1) + v_1 v_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1) + w_1 w_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)]}, \\
 y_0 &= -\frac{v_1 w_2 u_2 (w_1 - u_1) - v_2 w_1 u_1 (w_2 - u_2)}{2[u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1) + v_1 v_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1) + w_1 w_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)]}, \\
 z_0 &= -\frac{w_1 u_2 v_2 (u_1 - v_1) - w_2 u_1 v_1 (u_2 - v_2)}{2[u_1 u_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1) + v_1 v_2 (w_1 u_2 - w_2 u_1) + w_1 w_2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)]}.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

**3. Ойлерова крива на права спрямо триъгълник.** Нека  $p$  е права в равнината на  $\Delta ABC$ , като  $p \cap BC = A_0$ ,  $p \cap CA = B_0$  и  $p \cap AB = C_0$  (фиг. 2). Освен това с  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  означаваме правите, които минават съответно през върховете  $A$ ,  $B$  и  $C$  и са съответно успоредни на страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  (фиг. 2). Ще докажем, че шестте прави  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $CC_0$ ,  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  са допирателни към една крива от втора степен  $\bar{\omega}$  (фиг. 2).



Фигура 2

Уравненията на споменатите прави са следните:  $AA_0:vy+wz=0$ ,  $BB_0:ux+wz=0$ ,  $CC_0:ux+vy=0$ ,  $a_0:y+z=0$ ,  $b_0:x+z=0$ ,  $c_0:x+y=0$ . Освен това  $b_0 \cap c_0 = \bar{A}(-1,1,1)$ ,  $c_0 \cap a_0 = \bar{B}(1,-1,1)$ ,  $a_0 \cap b_0 = \bar{C}(1,1,-1)$  (фиг. 2). Ще намерим уравнението на кривата, която е вписана в  $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  и се допира до правите  $AA_0$  и  $BB_0$ . За целта разглеждаме  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  като координатен триъгълник. Ако  $\bar{A}(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\bar{B}(x_2, y_2, z_2)$ ,  $\bar{C}(x_3, y_3, z_3)$ , а точката  $M$  има координати  $(x, y, z)$  спрямо  $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  и координати  $(x', y', z')$  спрямо  $\Delta ABC$ , то са изпълнени равенствата:  $x = x_1x' + x_2y' + x_3z'$ ,  $y = y_1x' + y_2y' + y_3z'$ ,  $z = z_1x' + z_2y' + z_3z'$  (Paskalev & Chobanov, 1985). Като заместим координатите на  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  и  $\bar{C}$ , получаваме:

$$(13) \quad x = -x' + y' + z', \quad y = x' - y' + z', \quad z = x' + y' - z'.$$

От равенствата (13) следва:

$$(14) \quad x' = \frac{1}{2}(y+z) \quad y' = \frac{1}{2}(x+z) \quad z' = \frac{1}{2}(x+y)$$

Като използваме (13) за уравненията на  $AA_0$  и  $BB_0$  спрямо  $\Delta\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ , намираме:

$$AA_0 : (v+w)x' + (w-v)y' + (v-w)z' = 0, \quad BB_0 : (w-u)x' + (w+u)y' + (u-w)z' = 0.$$

Приемаме, че правите  $l_1$  и  $l_2$  от предишния пункт съвпадат съответно с  $AA_0$  и  $BB_0$ . Затова са изпълнени равенствата:

$$(15) \quad u_1 = v+w, \quad v_1 = w-v, \quad w_1 = v-w, \quad u_2 = w-u, \quad v_2 = w+u, \quad w_2 = u-w.$$

Заместваме (15) в (9) и получаваме уравнението на крива  $\bar{\omega}$  спрямо  $\Delta\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ , която се допира до правите  $a_0, b_0, c_0, AA_0$  и  $BB_0$ :

$$(16) \quad \bar{\omega} : u^2(v+w)^2 x'^2 + v^2(w+u)^2 y'^2 + w^2(u+v)^2 z'^2 - 2uv(v+w)(w+u)x'y' - 2vw(w+u)(u+v)y'z' - 2wu(u+v)(v+w)z'x' = 0.$$

В (16) заместваме (14) и получаваме уравнението на  $\bar{\omega}$  спрямо  $\Delta ABC$ :

$$(17) \quad \bar{\omega} : u^2(v-w)^2 x^2 + v^2(w-u)^2 y^2 + w^2(u-v)^2 z^2 - 2uv(3wu+3wv+uv+w^2)xy - 2vw(3uv+3uw+vw+u^2)yz - 2wu(3vu+3vw+wu+v^2)zx = 0.$$

Ако  $\bar{A}_0, \bar{B}_0$  и  $\bar{C}_0$  са допирните точки на  $\bar{\omega}$  съответно с правите  $a_0, b_0$  и  $c_0$  (фиг. 2), от (10), (13) и (15) намираме техните координати:

$$(18) \quad \begin{aligned} \bar{A}_0 & \left( 1, \frac{u(v-w)}{u(v+w)+2vw}, \frac{u(w-v)}{u(v+w)+2vw} \right), \\ \bar{B}_0 & \left( \frac{v(u-w)}{v(w+u)+2wu}, 1, \frac{v(w-u)}{v(w+u)+2wu} \right), \\ \bar{C}_0 & \left( \frac{w(u-v)}{w(u+v)+2uv}, \frac{w(v-u)}{w(u+v)+2uv}, 1 \right). \end{aligned}$$

Координатите на допирните точки  $L_a$  и  $L_b$  (фиг. 2) съответно на правите  $AA_0$  и  $BB_0$  с  $\bar{\omega}$  определяме от (11.1), (11.2), (13) и (15) във вида:

$$\begin{aligned} L_a & \left( \frac{(19)vw(2u+v+w)}{(u+w)v^2+(u+v)w^2}, \frac{wu(w-v)}{(u+w)v^2+(u+v)w^2}, \frac{uv(v-w)}{(u+w)v^2+(u+v)w^2} \right), \\ L_b & \left( \frac{vw(w-u)}{(v+u)w^2+(v+w)u^2}, \frac{wu(2v+w+u)}{(v+u)w^2+(v+w)u^2}, \frac{uv(u-w)}{(v+u)w^2+(v+w)u^2} \right). \end{aligned}$$



По аналогия с точките  $L_a$  и  $L_b$  разглеждаме точка  $L_c$ , чиито координати се изразяват по следния начин:

$$(20) L_c \left( \frac{vw(v-u)}{(w+v)u^2 + (w+u)v^2}, \frac{wu(u-v)}{(w+v)u^2 + (w+u)v^2}, \frac{uv(2w+u+v)}{(w+v)u^2 + (w+u)v^2} \right).$$

От уравнението (17) на кривата  $\bar{\omega}$  и уравнението на правата  $CC_0$  се получава, че те имат само една обща точка, координатите на която се изразяват с (20). Следователно  $CC_0$  се допира до  $\bar{\omega}$  в точката  $L_c$  (фиг. 2). С това е доказано, че правите  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $CC_0$ ,  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  се допират до една крива от втора степен  $\bar{\omega}$ . Кривата  $\bar{\omega}$  ще наричаме *крива на Ойлер за правата  $p$  спрямо  $\Delta ABC$* .

**4. Две свойства на шестте основни точки на  $\bar{\omega}$ .** Съответствието  $\varphi$  поставя на права  $p$  точка  $P$  от равнината на  $\Delta ABC$ , координатите на която се изразяват с (5). Нека  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  са средите съответно на отсечките  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$ , а средите на страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  са съответно  $M_a \left( 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ ,  $M_b \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$  и  $M_c \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$ .

Следващото свойство свързва правите  $M_aP_a$ ,  $M_bP_b$  и  $M_cP_c$  с кривата на Ойлер  $\bar{\omega}$ .

**Свойство 1.** *Образите на правите  $M_aP_a$ ,  $M_bP_b$  и  $M_cP_c$  при  $\varphi$  са допирните точки съответно на правите  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  с  $\bar{\omega}$ .*

От (5) получаваме координатите на точките  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  по следния начин:

$$(21) \begin{aligned} P_a & \left( \frac{2vw + wu + uv}{2(vw + wu + uv)}, \frac{wu}{2(vw + wu + uv)}, \frac{uv}{2(vw + wu + uv)} \right), \\ P_b & \left( \frac{vw}{2(vw + wu + uv)}, \frac{2wu + uv + vw}{2(vw + wu + uv)}, \frac{uv}{2(vw + wu + uv)} \right), \\ P_c & \left( \frac{vw}{2(vw + wu + uv)}, \frac{wu}{2(vw + wu + uv)}, \frac{2uv + vw + wu}{2(vw + wu + uv)} \right). \end{aligned}$$

От (21), координатите на  $M_a$ ,  $M_b$  и  $M_c$  и равенството (3) намираме уравненията на правите  $M_aP_a$ ,  $M_bP_b$  и  $M_cP_c$ :

$$\begin{aligned} P_aM_a : u(v-w)x + (2vw + wu + uv)y - (2vw + wu + uv)z &= 0, \\ P_bM_b : -(2wu + uv + vw)x + v(w-u)y + (2wu + uv + vw)z &= 0, \end{aligned}$$

$$P_c M_c : (2uv + wu + vw)x - (2uv + wu + vw)y + w(u - v)z = 0.$$

Сега, като използваме (5) и (18), получаваме, че  $\varphi(M_a P_a) = \bar{A}_0$ ,  $\varphi(M_b P_b) = \bar{B}_0$  и  $\varphi(M_c P_c) = \bar{C}_0$ . Това доказва свойство 1.

Другите три допирни точки  $L_a$ ,  $L_b$  и  $L_c$ , лежащи на  $\bar{\omega}$ , притежават следното свойство:

**Свойство 2.** *Образите на допирните точки на правите  $AA_0$ ,  $BB_0$  и  $CC_0$  с  $\bar{\omega}$  при  $\varphi$  са прави, минаващи през една точка  $P_0$  от правата  $PG$  (фиг. 2).*

Ако  $\varphi(L_a) = l_a$ ,  $\varphi(L_b) = l_b$  и  $\varphi(L_c) = l_c$ , то от (19), (20) и (4) получаваме уравненията на правите  $l_a$ ,  $l_b$  и  $l_c$  в следния вид:

$$l_a : u(v - w)x - v(2u + v + w)y + w(2u + v + w)z = 0,$$

$$l_b : u(u + 2v + w)x + v(w - u)y - w(u + 2v + w)z = 0,$$

$$l_c : -u(u + v + 2w)x + v(u + v + 2w)y + w(u - v)z = 0.$$

От последните уравнения получаваме, че правите  $l_a$ ,  $l_b$  и  $l_c$  се пресичат в една точка  $P_0$ , координатите на която са следните:

$$(22) \quad \begin{aligned} x_{P_0} &= \frac{vw(2u + v + w)}{(v + w)u^2 + (w + u)v^2 + (u + v)w^2 + 6uvw}, \\ y_{P_0} &= \frac{wu(u + 2v + w)}{(v + w)u^2 + (w + u)v^2 + (u + v)w^2 + 6uvw}, \\ z_{P_0} &= \frac{uv(u + v + 2w)}{(v + w)u^2 + (w + u)v^2 + (u + v)w^2 + 6uvw}. \end{aligned}$$

Освен това от (3) следва, че правата  $l_0$ , определена от точката  $P$  и медицентъра  $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , има следното уравнение:

$$(23) \quad l_0 : u(v - w)x + v(w - u)y + w(u - v)z = 0.$$

След заместване на координатите (22) в лявата част на уравнението (23) установяваме, че точката  $P_0$  лежи върху правата  $l_0$  (фиг. 2).

**5. Няколко свойства на Ойлеровата крива, свързани с определена описана за триъгълника крива.** Нека  $P = \varphi(p)$ ,  $G$  е медицентърът на  $\Delta ABC$  и  $O(x_0, y_0, z_0)$  е такава точка, за която  $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GP}$ . Точката  $O$  е център на описана за  $\Delta ABC$  крива  $\bar{k}$  (фиг. 2). Освен това точките  $P$ ,  $O$  и  $G$  лежат на една права, която наричаме *Ойлерова права за точката  $P$  спрямо  $\Delta ABC$*  (фиг. 2) (Grozdev & Nenkov, 2014,1). Следователно точката  $P_0$  от свойство 2 лежи върху Ойлеровата права  $l_0$ , определена от  $P$  (фиг. 2). С Ойлеровата права  $l_0$  са свързани и други свойства на кривата  $\bar{\omega}$ .

От дефиницията на точката  $O$  следва, че за координатите ѝ са изпълнени равенствата  $x_0 = \frac{1-x_P}{2}$ ,  $y_0 = \frac{1-y_P}{2}$  и  $z_0 = \frac{1-z_P}{2}$ . Като използваме (5), за тези координати получаваме:

$$(24) \quad x_0 = \frac{u(v+w)}{2(vw+wu+uv)}, \quad y_0 = \frac{v(w+u)}{2(vw+wu+uv)}, \quad z_0 = \frac{w(u+v)}{2(vw+wu+uv)}.$$

Нека  $O_1(x_1, y_1, z_1)$  е центърът на  $\bar{\omega}$ . От (12), (13) и (15) след известни преобразувания получаваме равенствата  $x_1 = x_0$ ,  $y_1 = y_0$  и  $z_1 = z_0$ . Така получихме следното

**Свойство 3.** Кривите  $\bar{k}$  и  $\bar{\omega}$  имат общ център (фиг. 2).

Сега ще намерим общите точки на  $\bar{k}$  и  $\bar{\omega}$  с  $l_0$ . Уравнението на  $\bar{k}$  е следното  $(-x_0 + y_0 + z_0)x_0yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0xy = 0$ . Като заместим с равенствата (24), получаваме:

$$(25) \quad \bar{k} : (v+w)yz + (w+u)zx + (u+v)xy = 0.$$

От уравнението (23) на правата  $l_0$  и равенството  $x + y + z = 1$  следва:

$$(26) \quad y = \frac{(uv + vw - 2wu)x + w(u - v)}{uv + wu - 2vw}, \quad z = \frac{(vw + wu - 2uv)x + v(u - w)}{uv + wu - 2vw}.$$

След заместване на тези равенства в уравнението (25) на  $\bar{k}$  получаваме следващото квадратно уравнение относно  $x$ :

$$(27) \quad (vw + wu + uv)[(v+w)u^2 + (w+u)v^2 + (u+v)w^2 - 6uvw]x^2 - u(v+w)[(v+w)u^2 + (w+u)v^2 + (u+v)w^2 - 6uvw]x + vw(v+w)(w-u)(u-v) = 0.$$

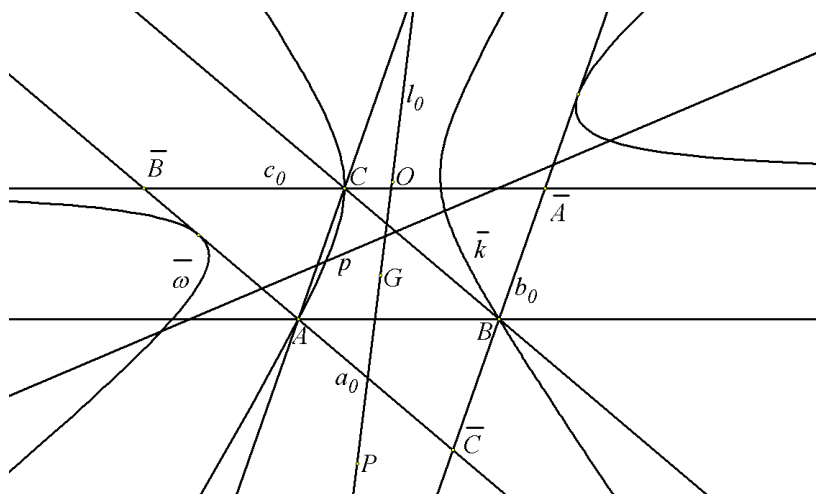
По аналогичен начин от уравнението (17) на  $\bar{\omega}$ , уравнението (23) на правата  $l_0$  и равенството  $x + y + z = 1$  получаваме квадратното уравнение (27). Следователно кривите  $\bar{k}$  и  $\bar{\omega}$  имат едни и същи общи точки с правата  $l_0$ . Координатите на тези общи точки намираме от (26) и (27) във вида:

$$(28) \quad x_{1,2} = \frac{u(v+w)\tau \pm (uv + wu - 2vw)\sqrt{(v+w)(w+u)(u+v)}\tau}{2(vw + wu + uv)\tau},$$

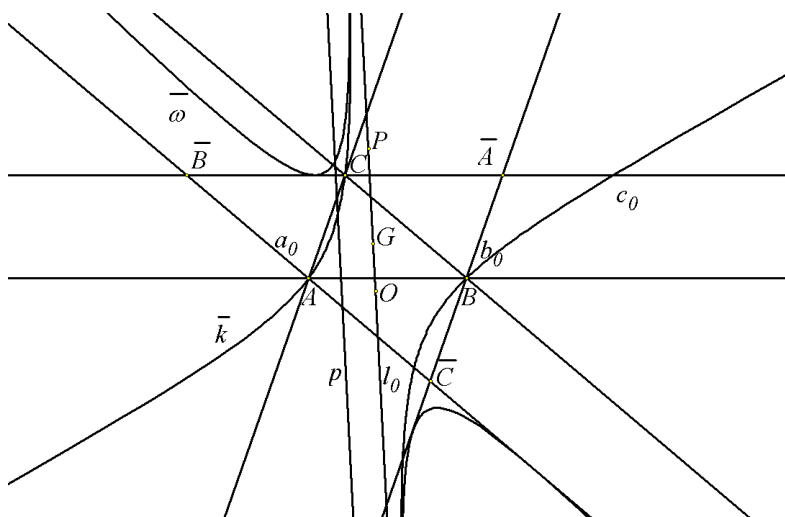
$$y_{1,2} = \frac{v(w+u)\tau \pm (uv + vw - 2wu)\sqrt{(v+w)(w+u)(u+v)}\tau}{2(vw + wu + uv)\tau},$$

$$z_{1,2} = \frac{w(u+v)\tau \pm (vw + wu - 2uv)\sqrt{(v+w)(w+u)(u+v)}\tau}{2(vw + wu + uv)\tau},$$

където  $\tau = (v+w)u^2 + (w+u)v^2 + (u+v)w^2 - 6uvw$ .



Фигура 3

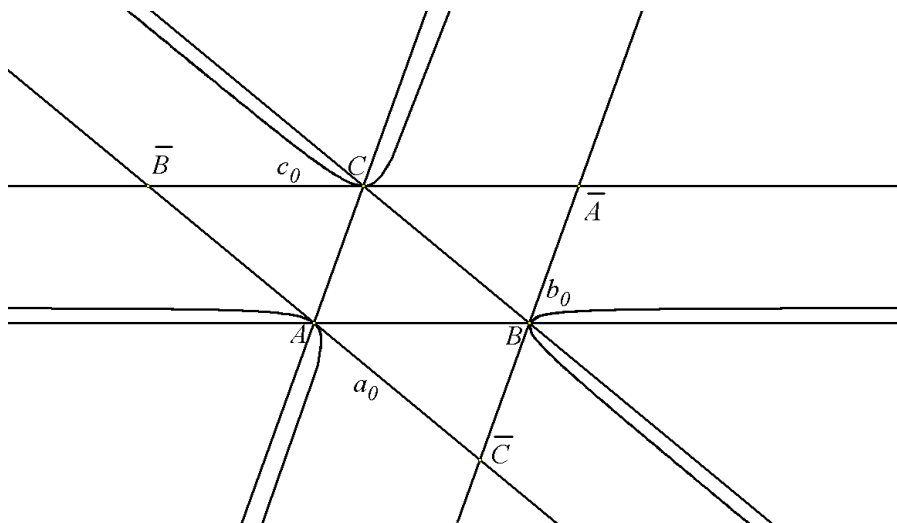


Фигура 4

От (28) се вижда, че пресечните точки на  $\bar{k}$  и  $\bar{\omega}$  с  $l_0$  не съществуват, когато  $(v+w)(w+u)(u+v)\tau < 0$  (фиг. 3). Когато  $(v+w)(w+u)(u+v)\tau > 0$ , съществуват две такива точки (фиг. 2).

Ако е изпълнено някое от равенствата  $v+w=0$ ,  $w+u=0$  или  $u+v=0$ , правата  $p$  би съвпадала с някоя от правите  $a_0$ ,  $b_0$  или  $c_0$ , което е изключено по

условие. Сега да обърнем внимание на това, че векторът  $\bar{\alpha}(v-w, w-u, u-v)$  е колинеарен с правата  $p: ux + vy + wz = 0$ , пораждаща Ойлеровата крива  $\bar{\omega}$ . Ако заместим координатите на  $\alpha$  в уравненията (17), (23) и (25), виждаме, че те се превръщат във верни равенства тогава и само тогава, когато  $\tau = 0$ . Следователно, когато  $\tau = 0$ , правите  $l_0$  и  $p$  са успоредни, а кривите  $\bar{k}$  и  $\bar{\omega}$  имат само една обща безкрайна точка, определена от вектора  $\alpha$  (фиг. 4). Така получаваме, че при  $\tau = 0$  кривите  $\bar{k}$  и  $\bar{\omega}$  са хиперболи, за които  $l_0$  е обща асимптота (фиг. 4). Сега да заместим  $u = y_P z_P$ ,  $v = z_P x_P$  и  $w = x_P y_P$  в  $\tau = 0$ . Получаваме равенството  $y_P z_P + z_P x_P + x_P y_P - 9x_P y_P z_P = 0$ . Следователно  $l_0$  е обща асимптота (допирателна в безкрайна точка) за  $\bar{k}$  и  $\bar{\omega}$  тогава и само тогава, когато точката  $P$ , която е съответна на  $p$  при  $\varphi$ , лежи върху кривата от трета степен  $K: yz + zx + xy - 9xyz = 0$  (фиг. 5).



Фигура 5

Сега ще докажем, че и в останалите случаи кривите  $\bar{k}$  и  $\bar{\omega}$  се допират в общите си точки с  $l_0$  (фиг. 2). В (Grozdev & Nenkov, 2014, 2) е показано, че правата  $l$ , допираща се до кривата  $k: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0$  в точката  $M(x_M, y_M, z_M)$ , има следното уравнение:

$$(29) l: (a_{11}x_M + a_{12}y_M + a_{13}z_M)x + (a_{21}x_M + a_{22}y_M + a_{23}z_M)y + (a_{31}x_M + a_{32}y_M + a_{33}z_M)z = 0.$$

От уравненията (17) и (25) на кривите  $\bar{\omega}$  и  $\bar{k}$ , координатите (28) и уравнението (29) получаваме, че двете криви  $\bar{\omega}$  и  $\bar{k}$  имат общи допирателни в общите си точки (28). Тези допирателни имат следните уравнения:

$$\begin{aligned} & \{[\mp(v+w)(w+u)(u+v)-s]\tau+2u(vw+wu+uv)s\}x+ \\ & +\{[\mp(v+w)(w+u)(u+v)-s]\tau+2v(vw+wu+uv)s\}y+ \\ & +\{[\mp(v+w)(w+u)(u+v)-s]\tau+2w(vw+wu+uv)s\}z=0, \end{aligned}$$

където  $s = \sqrt{(v+w)(w+u)(u+v)\tau}$ .

Получените резултати обобщаваме в следващите свойства.

**Свойство 4.** Ако кривите  $\bar{k}$  и  $\bar{w}$  имат общи точки с Ойлеровата права  $l_0$ , определена от точката  $P$ , то  $\bar{k}$  и  $\bar{w}$  са допирателни в тези точки (фиг. 2).

**Свойство 5.** Ойлеровата права  $l_0$  е успоредна на правата  $p$  тогава и само тогава, когато точката  $P = \varphi(p)$  описва кривата от трета степен  $K : yz + zx + xy - 9xyz = 0$  (фиг. 4, 5).

**Свойство 6.** Кривите  $\bar{k}$  и  $\bar{w}$  са хиперболи, за които Ойлеровата права  $l_0$  е обща асимптота тогава и само тогава, когато  $l_0 \parallel p$  (фиг. 4).

Доказаното тук свойство 4 се различава от формулираното в (Grozdev & Nenkov, 2017) свойство 4 по това, че в него изрично е отбелязано съществуването на общите точки на  $\bar{k}$  и  $\bar{w}$  с  $l_0$ . Както е споменато по-горе, тези точки при определени условия може да не съществуват. Разликата се дължи на това, че свойство 4 в (Grozdev & Nenkov, 2017) е формулирано само въз основа на извършени компютърни наблюдения, а уточнението му тук се дължи на аналитичните изследвания, които водят до извършеното доказателство на свойството. Освен това свойства 5 и 6 допълват свойство 4.

**6. Крива на Ойлер за правата на Ойлер.** С  $\bar{w}_0$  означаваме кривата на Ойлер за правата на Ойлер  $l_0$ , определена от точката  $P$ . От (17) и (25) намираме, че уравнението на кривата  $\bar{w}_0$  е следното:

$$\begin{aligned} & u^2(v-w)^2(uv+wu-2vw)^2x^2+v^2(w-u)^2(uv+vw-2wu)^2y^2+ \\ & +w^2(u-v)^2(wu+vw-2uv)^2z^2+ \\ (30) \bar{w}_0 : & +2uv(v-w)(w-u)[(2u^2+2v^2-3uv)w^2-uvw(u+v)+u^2v^2]xy+ \\ & +2vw(w-u)(u-v)[(2v^2+2w^2-3vw)u^2-uvw(v+w)+v^2w^2]yz+ \\ & +2wu(u-v)(v-w)[(2w^2+2u^2-3wu)v^2-uvw(w+u)+w^2u^2]zx=0. \end{aligned}$$

След решаване на системата, определена от уравненията (17) и (30) и равенството  $x+y+z=1$ , намираме, че тя притежава единствено решение  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Така получаваме следното

**Свойство 7.** Ойлеровата крива  $\bar{\omega}_0$  на Ойлеровата права  $l_0$ , определена от точката  $P$ , се допира до  $l_0$  в медицентъра  $G$  на  $\Delta ABC$ .

**7. Взаимно разположение на кривата  $\bar{\omega}$  и пораждащата я права.** Сега ще намерим общите точки (когато те съществуват) на кривата  $\bar{\omega}$  с пораждащата я права  $p$ . От уравнението на  $p$  и равенството  $x + y + z = 1$  получаваме:

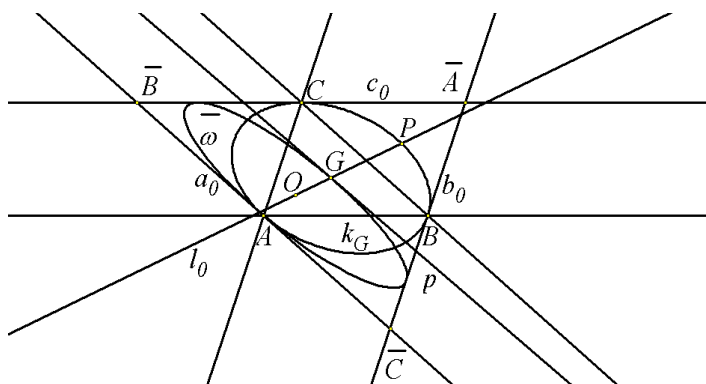
$$(31) \quad y = \frac{(w-u)x-w}{v-w}, \quad z = \frac{(u-v)x+v}{v-w}.$$

Заместваме равенствата (31) в (17) и получаваме квадратното уравнение  $(v+w)(w+u)(u+v)\tau x^2 + 2vw(v+w)(w+u)(u+v)(2u-v-w)x + v^2w^2(2u+v+w)^2 = 0$ .

След решаване на това уравнение и заместване на получените резултати в (31) намираме, че координатите на общите точки на  $\bar{\omega}$  и  $p$  се изразяват с формулите:

$$(32) \quad \begin{aligned} \bar{x}_{1,2} &= \frac{-vw(v+w)(w+u)(u+v)(2u-v-w) \pm uvw(v-w)\mathcal{G}}{(v+w)(w+u)(u+v)\tau}, \\ \bar{y}_{1,2} &= \frac{-wu(v+w)(w+u)(u+v)(2v-w-u) \pm uvw(w-u)\mathcal{G}}{(v+w)(w+u)(u+v)\tau}, \\ \bar{z}_{1,2} &= \frac{-uv(v+w)(w+u)(u+v)(2w-u-v) \pm uvw(u-v)\mathcal{G}}{(v+w)(w+u)(u+v)\tau}, \end{aligned}$$

където  $\mathcal{G} = 2\sqrt{-2(v+w)(w+u)(u+v)(u+v+w)}$ .



Фигура 6

От (32) се вижда, че  $\bar{\omega}$  и  $p$  имат общи точки, когато  $(v+w)(w+u)(u+v)(u+v+w) \leq 0$ . Правата  $p$  е допирателна за  $\bar{\omega}$  тогава

и само тогава, когато  $u + v + w = 0$ . От това равенство и (32) следва, че  $p$  се допира до  $\bar{\omega}$  в точката  $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ . Оттук получаваме следното

**Свойство 8.** Ако Ойлеровата крива  $\bar{\omega}$  се допира до пораждащата я права  $p$ , то допирната точка е медицентърът  $G$  на  $\Delta ABC$  (фиг. 6).

Ако в равенството  $u + v + w = 0$  заместим  $u = y_p z_p$ ,  $v = z_p x_p$  и  $w = x_p y_p$ , получаваме  $y_p z_p + z_p x_p + x_p y_p = 0$ . Това означава, че точката  $P = \varphi(p)$  лежи върху елипсата  $k_G : yz + zx + xy = 0$ , която има за център медицентъра  $G$  (фиг. 6). Така получихме следното

**Свойство 9.** Ако Ойлеровата крива  $\bar{\omega}$  се допира до пораждащата я права  $p$ , то точката  $P = \varphi(p)$  лежи върху описаната за  $\Delta ABC$  елипса  $k_G$  с център неговия медицентър  $G$  (фиг. 6).

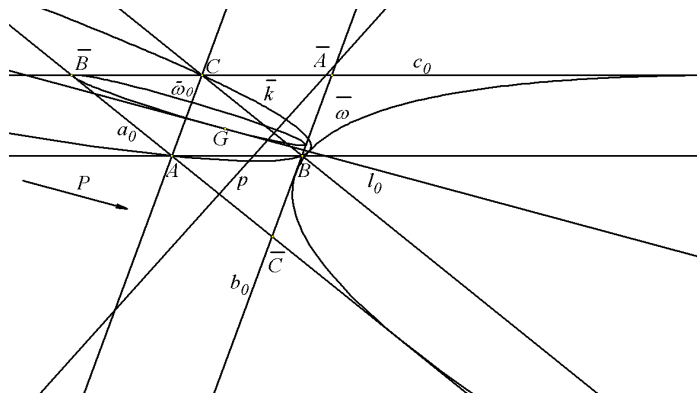
Тъй като според свойство 7 кривата  $\bar{\omega}_0$  се допира до пораждащата я права  $l_0$ , от свойство 9 следва

**Свойство 10.** Точката  $L_0 = \varphi(l_0)$  лежи върху елипсата  $k_G$ .

Всъщност от (5) и (23) следва, че координатите на  $L_0$  са следните:

$$(33) \quad \begin{aligned} x_{L_0} &= \frac{vw(u-v)(u-w)}{v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 - uvw(u+v+w)}, \\ y_{L_0} &= \frac{wu(v-w)(v-u)}{v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 - uvw(u+v+w)}, \\ z_{L_0} &= \frac{uv(w-u)(w-v)}{v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 - uvw(u+v+w)}. \end{aligned}$$

От координатите (33) се вижда, че точката  $L_0 \in k_G$ , което по друг начин потвърждава свойство 10.



Фигура 7



**8. Определяне вида на кривата  $\bar{\omega}$ .** За да определим взаимното положение на  $\bar{\omega}$  и безкрайната права на  $\triangle ABC$ , в уравнението (16) на  $\bar{\omega}$  спрямо  $\triangle ABC$  заместваме  $u = y_p z_p$ ,  $v = z_p x_p$ ,  $w = x_p y_p$  и  $z' = -x' - y'$  и получаваме уравнението:

$$\begin{aligned} & (x_p^2 + 4y_p^2 + z_p^2 + 4y_p z_p + 2z_p x_p + 4x_p y_p) x'^2 \\ & + 2(2x_p^2 + 2y_p^2 - z_p^2 + y_p z_p + z_p x_p + 3x_p y_p) x' y' + \\ & + (4x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 + 2y_p z_p + 4z_p x_p + 4x_p y_p) y'^2 = 0. \end{aligned}$$

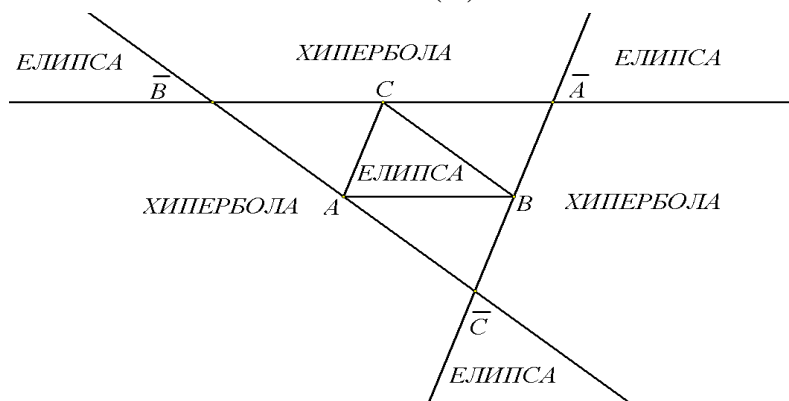
Дискриминантата на това уравнение е

$D' = -8(y_p + z_p)(z_p + x_p)(x_p + y_p)(x_p + y_p + z_p)$ . От координатите на  $P$  спрямо  $\triangle ABC$  в  $D'$  преминаваме към координатите на  $P$  спрямо  $\triangle ABC$  чрез равенствата (13). Така получаваме  $D' = -64x'_p y'_p z'_p (x'_p + y'_p + z'_p)$ . От последния израз следва, че  $D' = 0$  тогава и само тогава, когато  $x'_p + y'_p + z'_p = 0$ , т.е. когато  $P$  е безкрайна точка. Оттук получаваме

**Свойство 11.** Кривата  $\bar{\omega}$  е парабола тогава и само тогава, когато образът при  $\varphi$  на правата  $p$ , пораждаща  $\bar{\omega}$ , е безкрайна точка (фиг. 7).

В случаите, когато  $P$  е безкрайна, описаната крива  $k$  също е парабола. Според свойство 4 параболите имат две допирни точки, от които едната е крайна, а другата е общата им безкрайна точка (фиг. 7).

В останалите случаи  $x'_p + y'_p + z'_p = 1$  и координатите  $x'_p$ ,  $y'$  и  $z'_p$  имат точно определени знаци в зависимост от положението на  $P = \varphi(p)$  спрямо  $\triangle ABC$ . От тях се определя, че  $D' < 0$  или  $D' > 0$ . В първия случай кривата  $\bar{\omega}$  е елипса, а във втория – хипербола. На фиг. 8 е показан видът на  $\bar{\omega}$  в зависимост от положението на точката  $P = \varphi(p)$  спрямо  $\triangle ABC$ .



Фигура 8

От направените изводи за вида на  $\bar{\omega}$  се вижда, че кривата от трета степен  $K$  се съдържа в областите, определени от  $\Delta\bar{u}$ , в които  $\bar{\omega}$  е хипербола (фиг. 5). Това кореспондира със свойства 5 и 6. Освен това елипсата  $k_G$  от свойство 9 е вписана в  $\Delta\bar{ABC}$ , а когато  $P$  е вътрешна за  $\Delta\bar{ABC}$ , кривата  $\bar{\omega}$  е елипса (фиг. 6, 8). Така получаваме следното

**Свойство 12.** Ако  $\bar{\omega}$  се допира до пораждащата я права  $p$ , то кривата  $\bar{\omega}$  е елипса (фиг. 6, 7).

Ако  $x_p + y_p + z_p = 0$ , то  $P$  е безкрайна и  $D' = 0$ . Следователно в този случай  $\bar{\omega}$  е парабола. Нека сега  $P$  не е безкрайна точка. Случаят с допирането на  $\bar{k}$  и  $\bar{\omega}$  до  $l_0$  също може да се прецизира, но преди това ще определим вида на кривата  $\bar{\omega}$  в зависимост от точката  $P$ .

Когато се говори за вид на една крива от втора степен, е любопитно да се разбере кога тя е окръжност. Кривата  $\bar{\omega}$  е вписана в  $\Delta\bar{ABC}$ . Затова тя е окръжност тогава и само тогава, когато е вписана окръжност на  $\Delta\bar{ABC}$ . Следователно  $\bar{\omega}$  е окръжност в точно четири случая.

Ако  $BC = a$ ,  $CA = b$  и  $AB = c$ , центровете на вписаните в  $\Delta\bar{ABC}$  окръжности имат следните координатни представления:

$$\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right), \left(\frac{-a}{-a+b+c}, \frac{b}{-a+b+c}, \frac{c}{-a+b+c}\right),$$

$$\left(\frac{a}{a-b+c}, \frac{-b}{a-b+c}, \frac{c}{a-b+c}\right), \left(\frac{a}{a+b-c}, \frac{b}{a+b-c}, \frac{-c}{a+b-c}\right).$$

От тези координати, формулите (13) за преминаване на координати спрямо  $\Delta\bar{ABC}$  към координати спрямо  $\Delta ABC$  и формулите (24) за координатите на центъра на  $\bar{\omega}$  намираме, че вписаните в  $\Delta\bar{ABC}$  окръжности са Ойлеровите криви на следващите прави:

$$r: (a-3b+c)(a+b-3c)x + (a+b-3c)(-3a+b+c)y + (-3a+b+c)(a-3b+c)z = 0,$$

$$r_a: -(a+3b-c)(a-b+3c)x + (a-b+3c)(3a+b+c)y + (a+3b-c)(3a+b+c)z = 0,$$

$$r_b: (-a+b+3c)(a+3b+c)x - (a+b+3c)(3a+b-c)y + (3a+b-c)(a+3b+c)z = 0,$$

$$r_c: (-a+3b+c)(a+b+3c)x + (3a-b+c)(a+b+3c)y - (a+3b+c)(3a-b+c)z = 0$$

Ако  $R = \varphi(r)$ ,  $R_a = \varphi(r_a)$ ,  $R_b = \varphi(r_b)$  и  $R_c = \varphi(r_c)$ , от горните уравнения и (5) следва

$$R\left(-\frac{3a+b+c}{a+b+c}, -\frac{a-3b+c}{a+b+c}, -\frac{a+b-3c}{a+b+c}\right), R_a\left(-\frac{3a+b+c}{-a+b+c}, \frac{a+3b-c}{-a+b+c}, \frac{a-b+3c}{-a+b+c}\right),$$

$$R_b\left(\frac{3a+b-c}{a-b+c}, -\frac{a+3b+c}{a-b+c}, \frac{-a+b+3c}{a-b+c}\right), R_c\left(\frac{3a-b+c}{a+b-c}, \frac{-a+3b+c}{a+b-c}, -\frac{a+b+3c}{a+b-c}\right).$$

От тези окръжности само вътрешно вписаната може да се допира до пораждащата я права  $r$ , защото само тя би могла да съдържа медицентъра  $G$  на  $\triangle ABC$  (свойство 8). Тъй като триъгълниците  $\triangle A\bar{B}\bar{C}$  и  $\triangle ABC$  са хомотетични с център на хомотетия  $G$ , то ако  $G$  лежи върху вписаната окръжност на единия триъгълник, тя лежи върху вписаната окръжност и на другия (фиг. 9). Освен това  $G$  е обща допирна точка за двете окръжности и правата  $r$  е тяхната обща допирателна в  $G$  (фиг. 9). Накрая от условието за допиране  $u + v + w = 0$  и коефициентите в  $r$  получаваме, че  $G$  е обща допирна точка за вписаните окръжности на триъгълниците  $\triangle A\bar{B}\bar{C}$  и  $\triangle ABC$  тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството 
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{bc + ca + ab} = \frac{6}{5}.$$

#### REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014,1). Generalizations of some classical theorems of the triangle geometry (In Russian). *Theoretical and applied aspects of mathematics, informatics and education. Proceedings of the International Scientific Conference, Archangelsk, SAFU*, 35 – 54. (ISBN 978-5-261-00990-0) [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014, 1). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. *Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. Сборник материалов международной научной конференции. Архангельск, САФУ*, 35 – 54. (ISBN 978-5-261-00990-0)].
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014, 2). Concurrence, generated by tangents (In Bulgarian), *Mathematics and Informatics*, 6, 613 – 616. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014, 2). Конкурентност, породена от тангенти, *Математика и информатика*, 6, 613 – 616.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2015). Conics with collinear centers (In Bulgarian). *Mathematics and mathematical education*, 44, 291 – 298. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2015). Конични сечения с колинеарни центрове. *Математика и математическо образование*, 44, 291 – 298].
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2017). Some constructions, generated by the duality principle (In Bulgarian). *Mathematics and informatics*, 4, 391 – 400. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2017). Няколко конструкции, породени от принципа за дуалност, *Математика и информатика*, 4, 391 – 400].
- Mateev, A. (1977). *Projective Geometry* (In Bulgarian). Sofia: Nauka i Izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство].

Pascalev, G. & I. Chobanov (1985). *Notable points in the triangle* (In Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна прос-вета].

## PROOFS AND SPECIFICATIONS OF EXPERIMENTALLY DERIVED ASSERTIONS BY THE DUALITY PRINCIPLE

**Abstract.** Properties are proved in the paper, which characterize the geometric constructions described in (Grozdev & Nenkov, 2017). The proposed proofs lead to specifications of some of the properties formulated in (Grozdev & Nenkov, 2017).

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**  
University of Finance, Business and Entrepreneurship  
1, Gusla St.  
1618 Sofia, Bulgaria  
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**  
Technical College  
31, Sajko Saev St.  
5500 Lovech, Bulgaria  
E-mail: vnenkov@mail.bg