

ДИНАМИЧНИЯТ СОФТУЕР В ПОМОЩ НА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЗАДАЧИ ОТ ПРАКТИКАТА

Веселин Гушев, Данаил Гушев

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Статията разглежда някои задачи от практиката, чието изследване може да бъде моделирано нетривиално с помощта на динамичния математически софтуер GeoGebra. GeoGebra е интерактивно приложение за геометрия, алгебра, статистика и анализ, предназначено за обучение по математика и природни науки от началното училище до университета, достъпно безплатно в множество платформи.

Ключови думи: задачи от практиката; динамични математически модели; динамичен математически софтуер

1. Увод

В настоящата публикация ще разгледаме някои практически задачи и възможността при тяхното изследване да се използват технологичните средства и мощ на динамичния математически софтуер GeoGebra¹⁾.

GeoGebra е интерактивно приложение за геометрия, алгебра, статистика и анализ, предназначено за обучение по математика и природни науки от началното училище до университета, достъпно безплатно в множество платформи²⁾.

В предишни статии (Gushev & Gushev 2008; Gushev 2008; Gushev & Gushev 2013) са показани възможностите на софтуера за динамична математика и са представени етапите (Gushev 2008), през които е преминало обучението за работа с динамични среди на единия от авторите в ранните му ученически години. Изброени са възможностите на продуктите за динамична математика и е достигнато до извода, че няма възрастови граници за приложението на продуктите за динамична математика и ограничения в начините на използването им, както и в дълбочината на постигнатите резултати.

2. За старите практически задачи и новите изследователски методи

Да разгледаме една проста житейска ситуация, която би могла да се случи в наши дни.

Димитър излезе от сградата на Стопанския факултет на СУ за последен път като студент. Беше взел дипломата си с пълно отличие, но от тук

нататък следваше истинският живот и суровите му предизвикателства. Тъй като корпоративната стълбица беше ужасна перспектива за него, още същия ден Димитър заяви кредит в банката и отиде да уреди купуването на помещение, което щеше да се превърне в негов собствен бар. Не беше лесно, но благодарение на професионализма на дизайнера и майсторите, както и на няколко добри приятели той стегна мястото, сложи осветление и озвучаване. Барплотът, столовете и чашиите полека заемаха местата си – всичко, нужно за един хубав бар! С наученото в Стопанския Димитър организира една мащабна рекламна кампания и хората в града вече нетърпеливо очакваха деня на откриването. Заветният ден дойде, а час преди обявеното време хората вече чакаха отпред на опашка. Димитър се суетеше и искаше да се увери, че всяка подробност е наред. Двайсет минути преди вратите да отворят, барманът, блед като платно, отиде при Димитър и му каза:

- Забравили сме да купим от малките мерки за алкохол!
- Как така? – обърка се Димитър.
- Имаме мерки само по 100 милилитра, цялото меню е с цени за 50 милилитра, няма как да наливам цяла вечер на око!

Паниката започна да завладява Димитър, но изведнъж той си спомни нещо от детските си си години на село. Един проблем, който той реши заедно с дядо си Димитър, на когото беше кръстен. Изливаха бетон и цяха да им трябват точно 150 литра вода, а дядо му имаше само 300-литрова бъчва, останала от едно време. Когато малкият Митко пита дядо си как могат премерят нужното количество вода, дядо му му показва трика: бъчвата трябва да се напълни до повече от половината и да се наклони бавно, като водата се излива, докато над нивото ѝ леко се покаже горният ръб на дъното.

С мерките за алкохол беше същото, само че трябваше от бутилката се налива докато наклонената мярка не се напълни наполовина. След като разясни на бармана как да отмерва точно 50 милилитра, Димитър спокойно продължи приготовленията за откриването. То беше напълно успешно и протече без повече главоболия. На следващия ден все пак той си поръча и малки мерки...

В тази история не става ясно дали дядо Димитър е имал знания по математика, или просто е събрал и приложил многогодишния опит на поколенията, но решението на тази практическа задача, макар и просто, се основава на факта, че бъчвата е симетрична и има еднакви дъна (същото се отнася и за цилиндричната мярка), както и на небезизвестния принцип на Кавалиери.

Практическата задача, която ще разглеждаме в тази статия, бе предложена като тема за изследователски проект по време на XXII републиканска лятна научноизследователска школа, проведена през месец юли 2017 г. в покрайнините на г. Минск, Република Беларус³⁾. В лятната школа освен няколко пред-

варително поканени участници от чужбина, участват предимно лауреати от националните олимпиади и състезания на Беларус по математика, информатика, физика и астрономия. В рамките на три седмици учениците слушат лекции, провеждат експерименти, решават задачи, спортуват, общуват помежду си и най-важното – под ръководството на преподавател разработват проект по зададена тема, който бива представен и защитен чрез доклад пред официална комисия. През 2017 г. двамата автори взеха участие за пореден път в проведеното на школата в традиционните си роли на преподавател и ученик, като разработеният проект бе оценен като най-добър в секцията си по време на заключителната конференция.

Връзките с колегите от Беларуския държавен университет са дългогодишни и са свързани освен с лятната школа и с Международния турнир на младите математици⁴⁾. През 2020 г. турнирът се проведе в електронна среда и по стечение на обстоятелствата, същата задача бе включена като част от темата за турнира (ITYM 2020, Problem 4 “A Glass of Juice”)^{5), 6)}.

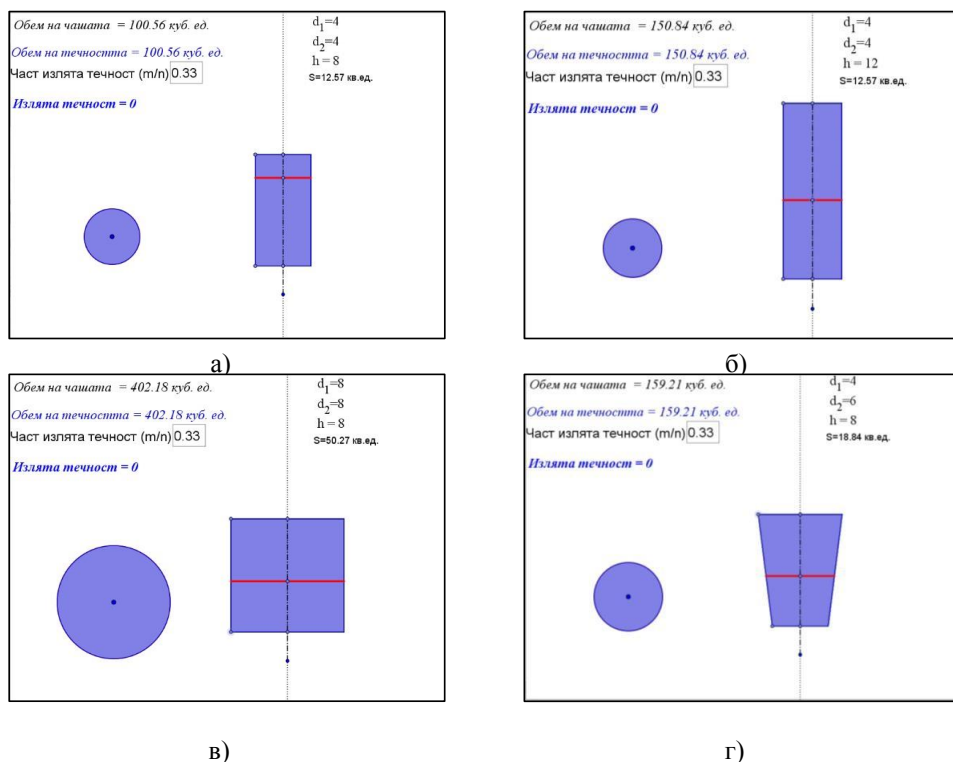
Ето и формулировката на задачата³⁾.

Задача: *Върху хоризонтална равнина е поставена цилиндрична чаша, пълна до ръба си с вода.*

- Ако височината на чашата е два пъти по-голяма от диаметъра на основата ѝ, на какъв ъгъл φ трябва да се наклони чашата, за да се излее точно половината от съдържанието ѝ?
- На какъв ъгъл трябва да се наклони чашата, за да се изляят точно $\frac{m}{n}$ части от водата?
- Да се решат предишните две задачи, ако височината на чашата се отнася към диаметъра ѝ както $a:b$.
- Да се реши задачата за чаша с формата на пресечен конус с диаметър на дъното d_1 , диаметър на горния ръб d_2 и височина h . ($d_1 \leq d_2$).

Задачата, на пръв поглед, изглежда тривиална и част от учениците, на които бе дадена, погрешно смятаха, че каквото е положението с основното сечение на чашата, същото ще се отнася и за обемите на течността.

Авторите бяха наясно, че това далеч не е така. За да се преборят лесно с трудностите при пресмятането на обемите на излятата и на останалата в чашата вода (които само се задълбочават при варианта с пресечен конус), решиха да построят работещ динамичен модел на задачата в средата на софтуера GeoGebra. Моделът позволява промяна на параметрите на чашата, илюстрира процеса с изливането на вода и пресмята съответните обеми при накланянето на чашата под даден ъгъл (фигура 1).

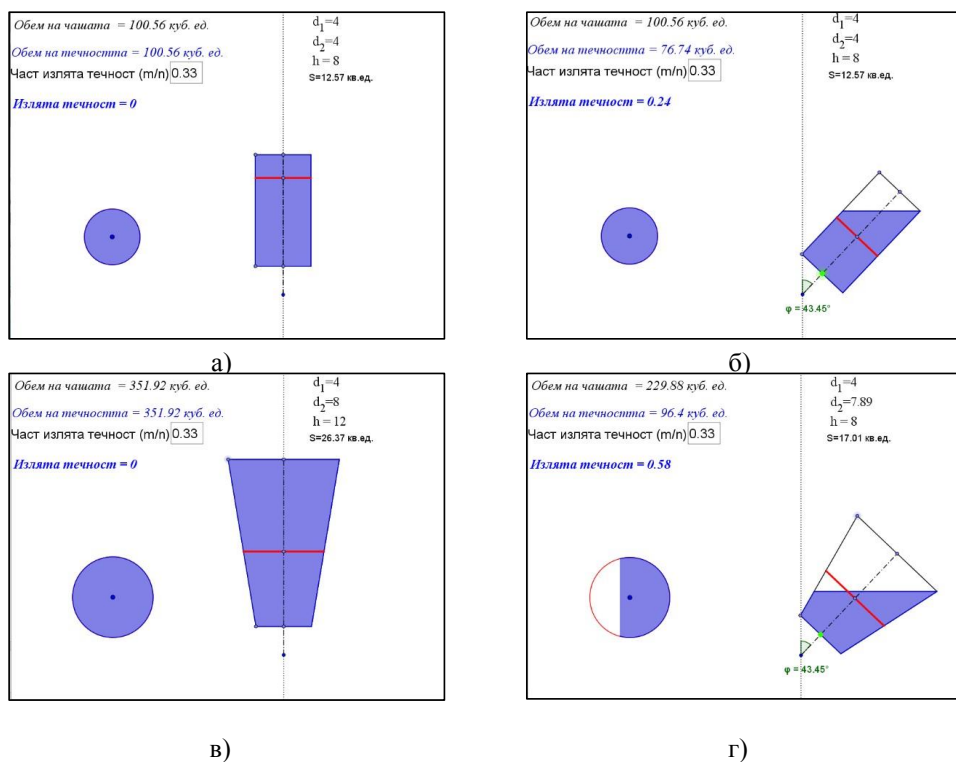


Фигура 1. Моделът при различни форми и размери на чашата

Една от целите при създаването на динамичния модел бе да бъдат описани всички възможни задачи едновременно (върху един модел), т.е. измеренията на чашата да могат да бъдат променяни свободно и независимо едно от друго, като при промяна на параметрите се пресмятат автоматично получените обеми. При фиксирани размери на чашата тя може да се накланя на произволен ъгъл, при което моделът пресмята автоматично обема на останалата течност и показва каква част от чашата е празна. С една дума, авторите са се постарали „изливането“ на водата да бъде представено реалистично.

На фигура 1 са изобразени няколко състояния на модела при различни стойности на параметрите d_1 , d_2 и h .

Вече можем да избираме параметрите на чашата и да я накланяме. Червената линия показва позицията на изобразеното вляво сечение на чашата, а S е лицето на покритата от вода площ на това сечение (фигура 2). С помощта на мишката позицията на сечението може да се променя и да се следи лицето на покритата от вода част от сечението.

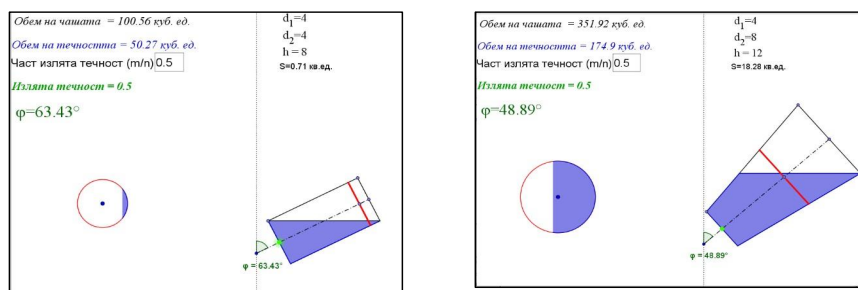


Фигура 2. Състояние на модела при промяна на параметрите

При пресмятане на обемите са използвани различни техники за разделяне съда на части. За намиране обема на някои от частите са използвани познатите от училище формули за обем на цилиндър и пресечен конус. Там, където е възможно, е използвана идеята за изливане на половината обем (от дядо Димитър), а за описание на по-сложните тела са използвани лицата на сеченията (по червената линия), след което те са интегрирани в съответните граници.

За определяне на търсения ъгъл при дадено съотношение между пълния и празния обем в полето „Част излята течност“ можем да въвеждаме съответната дроб.

Така можем да накланяме чашата и да следим обемите на излятата и оставащата течност, както и да следим ъгъла на наклона (фигура 2б и фигура 2г). При достигане на зададения обем моделът ни дава в зелено стойността на търсения ъгъл (фигура 3).



Фигура 3. Моделът при оптималния наклон на чашата

Така представеният модел реално отразява фамилията от задачи за накланяне на чаша и отливането от нея на даден обем и може да бъде използван за тяхното решаване. С нагласяването на размерите на чашата и попълването на дробта, съответстваща на частта излята течност, на потребителя му остава само да мести с мишката червената линия и да наблюдава изменението на сечението и параметъра S или да накланя чашата с помощта на зелената точка в основата ѝ и да следи за големината на ъгъла до изравняване на параметъра „Излята течност“ със зададената стойност на дробта и появата на зеления надпис с търсения ъгъл.

Заклучение

Решаването на този клас нетривиални задачи с помощта на софтуера GeoGebra още веднъж показва, че силата на интелигентния потребител, въоръжен с подходящ инструмент (система за динамична математика), е ограничена само от собственото му въображение и способности.

БЕЛЕЖКИ

1. <https://www.geogebra.org/>
2. <https://en.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>
3. https://uni.bsu.by/arrangements/summerschool/archive_brig.html
4. <http://www.itym.org/about-us>
5. <http://www.itym.org/welcome#problems>
6. <https://drive.google.com/file/d/1R7d6mST4gWFIc1dE38ZloIBaXalNU4ic/view>

ЛИТЕРАТУРА

ГУШЕВ А. & ГУШЕВ В., 2008. Програмата GEONExT в помощ на изследването на геометрични конструкции. *Математика и информатика*, **6**, 33 – 38.

- ГУШЕВ А. & ГУШЕВ В., 2013. *Динамичният математически софтуер от нула до безкрайност, Изследователски подход в образованието по математика*, София: Регалия 6, 5 – 10.
- ГУШЕВ В., 2008. Компютърът – ценен помощник при съставяне и проверка на математически хипотези. *Математика и информатика*, **5**, 25 – 31.

REFERENCES

- GUSHEV A. & GUSHEV V., 2008. Examining geometric constructions using the GEONExT software. *Mathematics and Informatics*, **6**, 33 – 38. [In Bulgarian].
- GUSHEV A. & GUSHEV V., 2013. *The dynamic mathematical software – from zero to infinity, Inquiry-based mathematical education*. Sofia: Regalia 6, 5 – 10. [In Bulgarian].
- GUSHEV V., 2008. The computer – a useful tool in formulating and testing mathematical conjectures. *Mathematics and Informatics*, **5**, 25 – 31. [In Bulgarian]

SOLVING REAL-WORLD PROBLEMS USING THE DYNAMIC MATHEMATICAL SOFTWARE

Abstract. The article describes some mathematical problems that arise in everyday life. Using GeoGebra non-trivial dynamic models describing such problems are constructed. GeoGebra is an interactive geometry, algebra, statistics and calculus application, intended for learning and teaching mathematics and science from primary school to university level. GeoGebra is available on multiple platforms and operating systems.

Keywords: real-world problems; dynamic mathematical models; dynamic mathematical software

✉ **Dr. Vesselin Gushev, Assoc. Prof.**

ORCID ID: 0000-0002-9049-5347

Faculty of Mathematics and Informatics

Sofia University

Sofia, Bulgaria

E-mail: v_gushev@fmi.uni-sofia.bg

✉ **Danail Gushev**

ORCID ID: 0000-0002-1518-5904

Faculty of Economics and Business Administration

Sofia University

Sofia, Bulgaria

E-mail: danailgushev@gmail.com