Educational Matters
Научно-методически статии

ДИДАКТИЧЕСКИ СЦЕНАРИЙ ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ XXI МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧЕСКА ОЛИМПИАДА

Борислав Лазаров
Институт по математика и информатика – БАН

Резюме. В статията е представена лекция в Сократов стил, изнесена от автора на математическия майсторски клас „Черноризец Храбър“, 2017 г. Оригиналната задача 1 от XXI младежка балканска математическа олимпиада е декомпозирана в серия спомагателни задачи за конкретната целева група. По време на експерименталното обучение са проследени два индикатора за прогрес. Направените предварителни изводи биха могли да бъдат полезни при подготовката на изявени ученици по математика, ориентирана към внедряване на изследователски подход.

Keywords: inquiry-based approach; problem decomposition; Socratic style teaching

От 24 до 29 юни 2017 г. в СОК „Камчия“ се проведе XXI младежка балканска олимпиада по математика, където българските отбори имаха впечатляващо добро представяне. Обаче първата задача от състезателната тема беше затруднила нашите състезатели – представяни бяха решения на по 5, 6, та дори и 8 страници, като в повечето от тях имаше пропуски. Това ни даде основание да проведем експериментално обучение, за да изясним някои детайли около тази задача, които впоследствие да бъдат отчетени при подготовката за математически състезания на изявени ученици, но също и да послужат като пример за организиране на изследователско търсене.

В тази връзка, проведохме обучаващ експеримент с група ученици, участващи в майсторския клас по математика „Черноризец Храбър“, проведен от 6 до 12 юли 2017 г. в рамките на образователната и изследователска програма „Черноризец Храбър“ – съвместен проект на Института по математика и информатика – БАН, и фондация „Интелектуал 2050“ – Астана. В групата участваха 20 ученици от VI до IX клас. Условно обединихме учениците до VII клас в младша група, а останалите – в старша група.

Теоретична рамка

В проектирането на дидактическия сценарий приложихме декомпозиция на задача в система от подзадачи. Наблюдавахме два индикатора.

1. Ситуативна познавателна активност, която отчитахме по четиристепенна скала {–1 ÷ 2}. Тук (–1) означава демонстративна липса на интерес; 0 е безразличие; 1 е самостоятелна работа в тетрадката; 2 е активно участие в обсъжданията.

2. Отношение към изследователското търсене, което отчитахме по тристепенна скала {–1 ÷ 1}. Тук (–1) означава нежелание/неумение да се работи по поставените въпроси; 0 е пасивно проследяване на въпроса: преписване от дъската или от друг ученик; 1 е активно изследване на варианти.

Самото обучение реализирахме в рамките на 90-минутна лекция беседа. Парадигмата е обичайната за Сократов стил: *целите на обучението са изяснени; дидактическият инструментариум се подбира съобразно контекста на класа, като ключови елементи в дидактическия сценарий са декомпозицията на задача и типът интервенция*. За целта прилагахме контекстно обусловени субмодели от дидактическия модел Тайпе (Lazarov, 2013).

Въвеждащи примери

Лекцията започнахме с въвеждащи примери.

Задача 1. Възможно ли е да групирате по двойки естествените числа от 1 до 6 по такъв начин, че произведението на числата в едната двойка да е равно на сбора от произведенията на числата в другите две двойки.

Учениците бързо и без усилия се справиха с тази и следващата задача, в която същото се питаше за числата от 2 до 7. Ето и съответните представяния:

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 5; \quad 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 7.$$

Последва такава задача за числата от 3 до 8. Тук масово учениците започнаха проверки, в повечето случаи без някаква система за описване на случаите. След известно време прекратихме безплодните им усилия, като поставихме нова задача.

Задача 2. Колко са всевъзможните варианти за групиране на шест числа *a, b, c, d, e, f* по двойки, като едната двойка е обособена самостоятелно, а другите две сформират отделна група.

Учениците използваха познанията си по комбинаторика, някои от тях прилагайки съответните формули за съединения, а други – непосредствено комбинаторните принципи. Така или иначе, в рамките на няколко минути резултатът бе получен. Ето едно типично решение.

За първата двойка от групата с две двойки имаме $C_6^2 = 15$ възможности, за втората възможностите са $C_4^2 = 6$; така получаваме

$15 \cdot 6 = 90$ групи от по две двойки числа; всяка група е броена по два пъти (веднъж като първа и още веднъж като втора двойка), значи имаме $\frac{90}{2} = 45$ варианта (третата двойка числа еднозначно се определя от първите две).

Аритметични ограничения

В контекста на задачата за произведенията резултатът от задача 2 означаваше, че за групирането на числата от 3 до 8 трябва формално да се извършат 45 проверки – доста обезкуражаващо. Това ни даде основание да поставим въпроса за намирането на някакви ограничаващи условия. Формулирахме ги в отделни задачи.

Задача 3. Ако *a, b, c, d, e, f* са последователни естествени числа и $a \cdot b + c \cdot d = e \cdot f$, то какво може да се каже за четността на произведенията?

По-опитните ученици бързо направиха заключението: всяко произведение е четно. Обосновката също не ги затрудни: измежду 6 последователни естествени числа точно 3 са четни; две четни не могат да бъдат в едно произведение, понеже тогава ще има точно едно нечетно число в сбора $a \cdot b + c \cdot d = e \cdot f$.

Изводът в контекста на задача 1: числата се групират четно с нечетно.

Следвайки методиката на Пойя за задаване на въпроси (Polya, 1945: 29 – 30), формулирахме следващата задача доста неопределено: може ли да намерите друго ограничение за групирането? След известно изчакване, в което не последва предложение, направихме подсказката: какво може да се каже за групите по отношение на делимост на 3? Учениците започнаха да изказват хипотези, но до точната формулировка достигнахме съвместно.

Задача 4. Докажете, че ако *a, b, c, d, e, f* са последователни естествени числа и $a \cdot b + c \cdot d = e \cdot f$, то точно едно от произведенията е кратно на 3.

Доказателството изискваше две наблюдения: първо, че точно две от числата *a, b, c, d, e, f* са кратни на 3; второ, че двете кратни на 3 не могат да са в различни групи. Доколкото тези наблюдения повтаряха разсъжденията от решението на задача 3, оставихме ги за самостоятелно изпипване.

Сега бяха формулирани двете ограничителни условия за последователните естествени числа *a, b, c, d, e, f*, такива, че $a \cdot b + c \cdot d = e \cdot f$: групирането е четно с нечетно и двете кратни на 3 са в една група. Прилагайки тези ограничения за числата от 3 до 8, учениците имаха да направят всичко на всичко две проверки, за да установят, че исканото условие не може да се изпълни: за произведенията {3 ∙ 6; 4 ∙ 5; 7 ∙ 8} и {3 ∙ 6; 4 ∙ 7; 5 ∙ 8} се проверяваше дали най-голямото е сбор на другите две.

Бързо протече и проверката за числата от 4 до 9. Тя показа, че исканото условие не може да се изпълни и за тези 6 последователни естествени числа.

Сега поставихме общата задача.

Задача 5. Да се намерят всички множества от 6 последователни естествени числа $\{a, b, c, d, e, f\}$, за които е възможно представянето $a \cdot b + c \cdot d = e \cdot f$.

Тази формулировка по същество е равносилна на оригиналната формулировка на задача 1 от Младежката балканска олимпиада по математика.[1)]

Идеология и практика

Преди да ориентираме учениците към обмисляне на решението на задача 5, направихме следната историческа „забежка“.

> През XVII в. Пиер Ферма написал в полето на една книга, че е доказал твърдението: уравнението $x^n + y^n = z^n$ няма решение в цели числа (x,y,z) за всяко естествено число $n \geq 3$. Общата задача обаче остава нерешена повече от 3 века, макар за над 4 милиона стойности на n верността на твърдението да е проверена (с прилагане на компютърни технологии). В края на XX в. теоремата е доказана, но с аналитични средства, а не с проверки.[2)]

С тази „забежка“ целяхме да покажем на учениците, че колкото и конкретни проверки да се извършват, задача 5 ще остане нерешена, ако не се намерят аналитични ограничения за броя на проверяваните множества.

Доколкото в експерименталното обучение не планирахме достатъчно време за самостоятелно обмисляне, някои ключови моменти бяха подавани на учениците в готов формат. Такава беше подсказката за преформулиране на задача 5 чрез параметризация – най-малкото от шестте числа да се означи с n. Сега множеството $\{a, b, c, d, e, f\}$ беше заменено с множество, задавано чрез един параметър: $\{n; n+1; n+2; n+3; n+4; n+5\}$. Без да конкретизираме кои са множителите, означихме лявата страна на равенството, $a \cdot b + c \cdot d = e \cdot f$ с $L(n)$ дясната – с $R(n)$ и поставихме задача за ограничение от съвсем друг тип.

Задача 6. При дадено n да се намери за коя двойка от множеството $\{n; n+1; n+2; n+3; n+4; n+5\}$ произведението $R(n)$ е най-голямо; за кое групиране по двойки се получава най-малката стойност на $L(n)$?

Първата част е очевидна: $maxR(n) = (n+4)(n+5)$. За втората част – че $minL(n) = n(n+3) + (n+1)(n+2)$, учениците трябваше да съобразят, че числата трябва да се избират от множеството $\{n; n+1; n+2; n+3\}$, и тогава всевъзможните произведения се различават само по свободния член, който е най-малък в описаното групиране.

Една ограничителна оценка за n може да се получи от неравенството $minL(n) > maxR(n)$. Подобно ограничение прави невъзможно равенството $L(n) = R(n)$ при произволно групиране по двойки. Добре е да се приложи илюстрация с графики, но предвид възрастта на голяма част от учениците беше използвано образно обяснение чрез сравняване по възраст на най-голе-мия ученик от малката група с най-малкия от голямата.

Задача 7. За кои *n* е в сила

$$n(n+3)+(n+1)(n+2)>(n+4)(n+5)?$$

Понеже голямата част от учениците не бяха изучавали квадратни не-равенства, решението на задача 7 беше сведено към обосноваването, че $n(n-3)>18$ винаги когато $n \geq 7$.

Лекцията беседа приключи с обсъждане какво още е необходимо, за да се завърши решението на задача 5. Учениците успяха да направят „пътна карта“, чието изпълнение беше оставено за самостоятелна работа.

Наблюдения върху индикаторите

Регистрирането на данните по време на лекцията беседа беше извършено от Жанар Ахметжанова – преподавател в Балдаурен. Условно наблюдението е разделено в две фази: (a) до задача 4 (включително) и (b) след историческата „забежка“. Данните сме поместили в таблица 1, като за старшата група те са в лявата колонка.

Таблица 1.

	i1a	i1b	i2a	i2b
C1	2	2	1	
C2	2	2		1
C3	1	2	1	1
C4	1	2	1	1
C5	2	2	1	1
C6	2	2	1	1
C7	2	1	1	1
C8	2	2	1	1

	i1a	i1b	i2a	i2b
M01	-1	0	1	0
M02	1	1	0	0
M03	1	0	0	0
M04	1	1	1	0
M05	1	0	0	
M06	1	0	0	0
M07	-1	-1	0	0
M08	1	0	0	0
M09	2	1	1	0
M10	2	2	1	1
M11	-1	0	0	0
M12	2	0	0	0

С i1a и i1b са означени наблюдаваните стойности на първия индикатор, съответно за първата и втората фаза; аналогично i2a и i2b са стойностите на втория индикатор.

Дидактически анализ

В тази секция ще направим някои заключения в качествен план. От таблиците се вижда ясно, че експерименталната част е провокирала по-висока познавателна активност, особено в старшата група. Въвеждащите примери са достъпни за всички ученици. Задачите за аритметичните ограничения са от зоната на актуално развитие на старшата група, но извън нея за повечето ученици от младшата (Ganchev & Kuchinov, 1996: 35 – 40). Въпреки това този материал е в зоната за близкото развитие на цялата обучаема група (ibid.).

Не така стоят нещата във втората фаза. Идеята за минимаксна оценка се оказа извън зоната за актуално развитие на тези ученици. Това обяснява и ниските стойности по двата индикатора, особено в младшата група. В такива условия изследователско търсене не може да се организира.

Макар в двете фази да става въпрос за ограничителни условия, те се различават принципно. Темата *делимост* е неотменима част от подготовката за математически състезания още в най-ранните етапи. Напротив, оценки на параметър са необичайни до VIII клас, а когато се правят, те по-често са с недостатъчни обосновки. В конкретния случай разчитахме повече на математическото чувство (Lazarov, 2011), отколкото на знания за скоростта на растене на полиноми. Ще вметнем, че в много от решенията на XXI МБМО такива оценки се правеха успешно.

Сократовият стил

За да подпомогнем преоткриването, т.е. достигането до определени заключения, прилагахме целия спектър контекстно обусловени модели за интервенция: резултантно обособена, изчаквателна, напътстване (Lazarov, 2013). Например комбинаторната задача беше добавена след наблюдението над няколко ученически опита да се справят със случая 3÷8 (резултантно обособена интервенция). Изчаквателната намеса се оказа подходяща след решаването на задачи 3 и 4, когато учениците самостоятелно проверяваха случая 4÷9. Напътствие беше прилагано при установяване на ограничението за групирането на четно с нечетно число.

За избор на тип интервенция в Сократовия стил нямаме рецепта. Някои общи насоки могат да се намерят в статията на Максуел[3]. Ние обаче препоръчваме на преподавателите да се опират най-вече на собствената си ерудиция.

Сократовата беседа печели и от различни коментари, допълващи основната линия на преподаване. Например цитираната вече класика на Пойя изобилства с различни типове забежки, но Пойя не се ограничава с това, а отделя цяла секция, посветена на въпроса (ibid.,p. 99 – 105). След въвеждащите примери беше споменато, че интересни за изследване са такива въпроси, които касаят част от разглежданите обекти, но не всички. Това е особено полезно за ученици, насочвани към изследователско търсене. В нашия случай измежду първите 4 множества от 6 последователни числа точно половината допускат обсъжданото групиране, т.е. въпросът за намиране на всички такива множества е съдържателен.

Заключение

Разгледаният дидактически сценарий има ясните белези на индуктивно построяване, характерно за изследователския подход. Такива са и повечето решения на нашите олимпийци. Тези, които са опитвали директна дедуктивна атака, не са успели да решат задачата. Авторското решение, също дедуктивно, не е дадено от нито един състезател. Разбира се, индуктивният подход може да послужи за ориентиране в обстановката, но след това от изявените ученици се очаква да направят творческо преосмисляне. Това може да стане от само себе си при талантите, но е по-добре да се тренира в подготовката. Надяваме се предложеният сценарий да бъде полезен именно в такова направление.

NOTES/БЕЛЕЖКИ

1. http://jbmo2017.bg/organizers.html
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat%27s_Last_Theore
3. http://www.socraticmethod.net

REFFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Ganchev, I.& Kuchinov, Y. (1996). *Organization and methodic of mathematics lesson* (In Bulgarian). Sofia: Modul. [Ганчев, Ив.& Кучинов, Й. *Организация и методика на урока по математика.* София: Модул, 1996].

Lazarov, B. (2010). Building mathematics competence via multiple choice competitions. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education*. Vol. 14. No. 1, 1 – 10.

Lazarov, B. (2011). Monster problems design and sense-of-mathematics building. *The 6thCongress of WFNMC – The Proceedings*. Riga, 2011, 72 – 78.

Lazarov, B. (2013) Application of some cybernetic models in building individual educational trajectory. *Information Models and Analyses*. Vol. 2, No1, 90 – 99.

Polya, G. (1945). *How to solve it?* (In Russian).Princeton University Press. [Пойа, Д. (1961). *Как решать задачу*. Москва].

DIDACTIC SCENARIO ON A PROBLEM FROM THE 21ST JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

Abstract. The paper presents a lecture in Socratic style given by the author during the Chernorizec Hrabar Math Master Class, 2017. The genuine Problem 1 from the competition paper of the 21stJunior Balkan Math Olympiad has been decomposed in series of auxiliary problems with respect to a particular target group. Two indicators for progress have been observed during the experiment, both related to the inquiry-based teaching. The conclusions drawn could be potentially helpful in training advanced students in mathematics via the inquiry-based method.

✉ **Prof. Dr. Borislav Lazarov**
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
8, Acad. G. Bonchev Str.
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: lazarov@math.bas.bg