

ДИАГОНАЛНИ ТОЧКОВИ КОНФИГУРАЦИИ. ПРАВИЛО НА ТРИЪГЪЛНИКА. ИНВАРИАНТИ

Здравко Лалчев, Ирина Вутова

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. В настоящата разработка е направено специфично продължение (с аналитични средства) на идеята за лице и обем от училищния курс по геометрия. Показано е, че геометричните фигури четириъгълник и октаедър са конкретизации на диагонални точкови конфигурации и че инвариантите на тези конфигурации са аналози на понятията лице на четириъгълник и обем на октаедър. Предложен е единен подход при развитие на концепцията за „диагонални“ инварианти в 2-мерно, 3-мерно, 4-мерно и n -мерно ($n > 4$) пространство. С цел улесняване на обобщенията и опростяване на доказателствата са въведени компактни означения, а също така е изведено и последователно прилагане на „правилото на триъгълника“.

Keywords: n -dimensional space; coordinate; point, vector; diagonal configuration of points; determinant; invariant; triangle rule

1. Предварителни бележки

Известно е, че много от стереометричните понятия и твърдения (в това число и от училищния курс по геометрия) са „естествени“ пространствени обобщения (аналози) на планиметрични понятия и теореми. Поразителната и дълбока аналогия „равнина – пространство“ вдъхновява изследователите на училищната математика да търсят и нови, незабелязани досега пространствени „следи“ в равнината, както и равнинни „продължения“ в пространството. В тази връзка, представлява интерес случаят с добре познатото следствие от една от теоремите за лице на триъгълник, а именно: „Лицето на четириъгълника е равно на полупроизведението на дължините на диагоналите на четириъгълника и синуса на ъгъла между тях“. Елементарно геометричната формулировка на следствието не „подказва“ стереометричния „аналог“ на четириъгълника и прави неясна неговата „трансформация“ в пространството. През деветдесетте години на XX век един от авторите на настоящото изследване, преподавател по математика в Софийския университет „Св. Климент Охридски“ (тогава асистент, по-късно професор) Здравко Лалчев открива пространствен „модел“ на четириъгълника и достига до стереометричен ана-

лог на планиметричната теорема, посочена по-горе. И по-конкретно, след като прилага аналитикогеометричен подход, използвайки инструментариума на векторната алгебра, той формулира и доказва теоремата: „Обемът на октаедъра е равен на обема на тетраедър, определен от векторите по диагоналите на октаедъра“ (Лалчев, 1993). Последната теорема е пространствено обобщение на теоремата за лице на четириъгълник („Лицето на четириъгълника е равно на лицето на триъгълник, определен от векторите по диагоналите на четириъгълника“). Теоремата за октаедъра е публикувана за първи път в гръцкото математико-дидактическо списание „ΔΙΑΣΤΑΣΗ“ през 1993 г. в статия, озаглавена Αναγωγή πολυέδρων („Редукция на многостени“). Сегашната разработка е идейно продължение на цитираната статия за октаедъра и може да се разглежда като един „любопитен“ геометричен поглед (с елементарни линейноалгебрични средства) към пространства с повече от три измерения.

2. Двумерно пространство

2.1. Детерминанта на наредена двойка вектори. Лема

Нека в равнината (2-мерно пространство) е въведена афинна координатна система.

Нека a_1, a_2 са два вектора с координати съответно:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}), \\ \mathbf{a}_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}). \end{aligned}$$

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix}.$$

Детерминантите $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix}$ ще наричаме **детерминанти** съответно на наредените двойки вектори $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ и $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1)$.

Тъй като два обекта могат да бъдат наредени по $2!$ начина, то с двойката вектори $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ можем да свържем 2 детерминанти от втори ред. Въпросните детерминанти се получават една от друга чрез размятане на редове и техните абсолютни стойности са равни.

Нека отбележим и някои непосредствени следствия от въведените определения и означения.

1) При размяна местата на два вектора детерминантата променя своя „знак“, т.е.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix}.$$

2) При замяна на един вектор с неговия противоположен детерминантата променя своя „знак“, т.е.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_2 \end{vmatrix}.$$

Коментар. Известно е, че ако базата на координатната система определя триъгълник с лице 1, то детерминантата на двойката вектори $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ е равна на ориентираното лице на триъгълник с определящи вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ (Gjonov & Stoev, 1994).

Лема (правило на триъгълника). Нека A, B, X са три точки с координати съответно: $A(\alpha_1, \alpha_2)$, $B(\beta_1, \beta_2)$, $X(x_1, x_2)$ и $\mathbf{c}$ е вектор с координати (γ_1, γ_2) . Нека векторите $\mathbf{AX}, \mathbf{XB}, \mathbf{AB}$ са образувани съответно от наредените двойки точки (A, X) , (X, B) , (A, B) . Тогава за детерминатите:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{AX} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{XB} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \mathbf{AB} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{AX} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{XB} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{AB} \end{vmatrix}$$

са в сила равенствата:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{AX} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{XB} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{AB} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{AX} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{XB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{AB} \end{vmatrix}.$$

(Забележка. Или: $-\begin{vmatrix} \mathbf{XA} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{XB} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{AB} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{XA} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{XB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{BA} \end{vmatrix}.$)

Доказателство

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \mathbf{AX} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{XB} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{AB} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 & x_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 - x_1 & \beta_2 - x_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 + \beta_1 - x_1 & x_2 - \alpha_2 + \beta_2 - x_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{AB} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Второто равенство се доказва по същия начин.

2.2. Векторна детерминанта на елементарна точкова конфигурация. Инварианта.

За целите на изложението да припомним понятието елементарна точкова конфигурация в равнината. И така: нека A_1, A_2, A_3 са 3 точки в равнината (2-мерно пространство). Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите 2 точки, получаваме 3 отсечки: A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 . Така получената

конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в двумерно пространство. Точките A_1, A_2, A_3 ще наричаме **върхове**, а отсечките A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

Нека в равнината е дадена (елементарна) точкова конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3 , които имат координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}).$$

Да образуваме векторите A_1A_2, A_1A_3 . Техните координати са съответно:

$$A_1A_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{11}, \alpha_{22} - \alpha_{12}),$$

$$A_1A_3 = (\alpha_{31} - \alpha_{11}, \alpha_{32} - \alpha_{12}).$$

Съгласно въведените определения и означения детерминантата на наредената двойка вектори (A_1A_2, A_1A_3) има вида:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} - \alpha_{11} & \alpha_{22} - \alpha_{12} \\ \alpha_{31} - \alpha_{11} & \alpha_{32} - \alpha_{12} \end{vmatrix}.$$

$$\text{Казано по-кратко: } \begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} - \alpha_{11} & \alpha_{22} - \alpha_{12} \\ \alpha_{31} - \alpha_{11} & \alpha_{32} - \alpha_{12} \end{vmatrix}.$$

Коментар. Известно е, че ако базата на координатната система определя триъгълник с лице 1 и $A_1A_2A_3$ е триъгълник с върхове A_1, A_2, A_3 , то детерминантата $\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \end{vmatrix}$ на двойката вектори (A_1A_2, A_1A_3) е равна на ориентираното лице на триъгълник $A_1A_2A_3$ (Gjonov & Stoev, 1994).

Горните разсъждения ни дават основание да казваме, че детерминантата $\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \end{vmatrix}$ на наредената двойка вектори (A_1A_2, A_1A_3) е **векторна детерминанта** на елементарната точкова конфигурация $A_1A_2A_3$.

Тъй като три обекта могат да бъдат наредени по 3! начина, то с елементарната точкова конфигурация $A_1A_2A_3$ можем да свържем 6 детерминанти от втори ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1A_3 \\ A_1A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_2A_1 \\ A_2A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_2A_3 \\ A_2A_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_3A_1 \\ A_3A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_3A_2 \\ A_3A_1 \end{vmatrix}.$$

Да отбележим, че въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове или изнасяне на знака „минус“ по редове и техните абсолютни стойности са равни.

Горните разсъждения ни дават основание абсолютната стойност на която и да е от шестте детерминанти $(\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1A_3 \\ A_1A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_2A_1 \\ A_2A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_2A_3 \\ A_2A_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_3A_1 \\ A_3A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_3A_2 \\ A_3A_1 \end{vmatrix})$ да наречем **инварианта** на (елементарната) точкова конфигурация (A_1, A_2, A_3) .

2.3. Диагонална точкова конфигурация в двумерно пространство. Инварианта. (Теорема за лице на четириъгълник)

В началото на точката ще въведем понятието **диагонална точкова конфигурация** в двумерно пространство.

Нека в двумерно пространство са дадени четири точки A_1, A_2, B_1, B_2 , които образуват наредена четворка (в посочения ред). В този случай можем да считаме, че е дадена точкова конфигурация с **върхове** A_1, A_2, B_1, B_2 .

Нека върховете на конфигурацията $A_1A_2B_1B_2$ са разделени на две двойки (A_1, B_1) и (A_2, B_2) . Точките на всяка от двойките (A_1, B_1) и (A_2, B_2) ще наричаме **противоположни** и всяка отсечка, определена от двойка противоположни върхове, ще наричаме **диагонал** на конфигурацията. (В случая отсечките A_1B_1 и A_2B_2 са диагоналите на конфигурацията $A_1A_2B_1B_2$.)

Всеки две точки, които не са противоположни, ще казваме, че са **съседни** и отсечката, определена от двойка съседни точки, ще наричаме **ръб** на конфигурацията. (В случая отсечките $A_1A_2, A_1B_2, B_1A_2, B_1B_2$ са ръбовете на конфигурацията $A_1A_2B_1B_2$.)

Конфигурация от четири точки (в двумерното пространство) с фиксирани диагонали ще наричаме **диагонална точкова конфигурация**. (В случая наредената четворка точки (A_1, A_2, B_1, B_2) е диагонална точкова конфигурация (с диагонали A_1B_1 и A_2B_2 .)

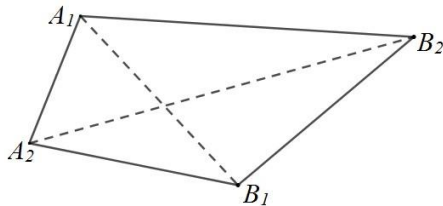
Нека $A_1A_2B_1B_2$ е диагонална точкова конфигурация (с диагонали A_1B_1 и A_2B_2). Да образуваме векторите по диагоналите на конфигурацията A_1B_1 и A_2B_2 .

Ще въведем и понятието детерминанта на диагоналната точкова конфигурация. И по-конкретно, под **детерминанта на диагоналната точкова конфигурация** $A_1A_2B_1B_2$ (с диагонали A_1B_1 и A_2B_2) ще разбираме детерминанта

та $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}$ на двойката (диагонални) вектори (A_1B_1, A_2B_2)

Ще предполагаме, че в двумерното пространство отсечките, определени от двойките съседни върхове, „ограждат“ диагоналната точкова конфигурация. (В случая отсечките, които „ограждат“ диагоналната конфигурация $A_1A_2B_1B_2$, са ръбовете $A_1A_2, A_1B_2, B_1A_2, B_1B_2$.)

Забележка. В равнината съществува множество от точки, което отговаря на определението за диагонална точкова конфигурация. Като пример за такава конфигурация може да служи четириъгълник с върхове A_1, A_2, B_1, B_2 и диагонали A_1B_1 и A_2B_2 (черт. 1).



Чертеж 1

Теорема. Нека в равнината (2-мерно пространство) е дадена афинна координатна система. Нека точките A_1, A_2, B_1, B_2 са върхове на диагонална точкова конфигурация с диагонали A_1B_1, A_2B_2 и X е произволна точка. Тогава за детерминантите на елементарните точкови конфигурации:

$$XA_1A_2, XA_1B_2, XB_1A_2, XB_1B_2$$

и диагоналната точкова конфигурация $A_1A_2B_1B_2$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}$$

Доказателство:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} = \\ & \left(\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} \right) + \left(- \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} \right) = \\ & = \begin{vmatrix} XA_1 \\ B_2A_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ B_2A_2 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} B_1A_1 \\ B_2A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Коментари

Равенството в теоремата се „конструира“, като се приложи „матричен“ принцип за построяване на вариациите от два елемента от втори клас с повторение. По-конкретно:

1) Първите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторите XA_1 и XB_1 се запишат последователно по 2 пъти, т.е.

$$XA_1XA_1XB_1XB_1XA_1XA_1XB_1XB_1.$$

2) Вторите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторите XA_2 и XB_2 се запишат, редувайки се по два пъти, т.е.

$$XA_2XB_2XA_2XB_2.$$

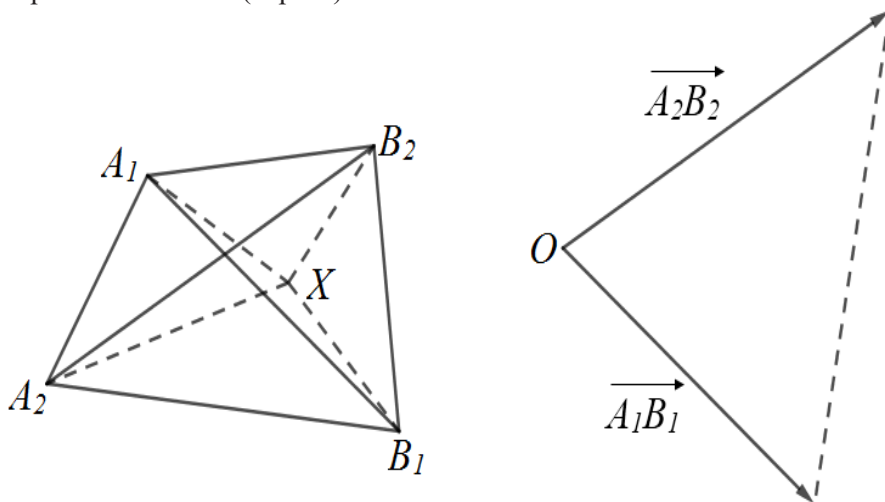
3) В резултат на действията в първите две точки се достига до детерминантите

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \end{vmatrix}.$$

4) Знаците пред събираемите в алгебричния сбор се определят от броя на буквата „B“ в съответната детерминанта. Ако буквата „B“ участва четно число пъти, знакът е „+“, ако буквата „B“ участва нечетно число пъти, знакът е „-“.

5) Дясната страна е $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}.$

Нека $A_1A_2B_1B_2$ е четириъгълник (диагонална точкова конфигурация) с върхове A_1, A_2, B_1, B_2 и диагонали A_1B_1, A_2B_2 (и страни $A_1A_2, A_2B_1, B_1B_2, B_2A_1$) и X е произволна точка (черт. 2).



Чертеж 2

Във връзка с доказаната теорема ще отбележим следното:

1) точката X разделя четириъгълника $A_1A_2B_1B_2$ на 4 триъгълника (елементарни точкови конфигурации) $XA_1A_2, XA_1B_2, XB_1B_2, XB_1A_2$;

2) алгебричният сбор от ориентираните лица на триъгълниците $XA_1A_2, XA_1B_2, XB_1B_2, XB_1A_2$ не зависи от точката X и е равен на ориентираното лице на триъгълника, определен от векторите A_1B_1, A_2B_2 (по диагоналите на четириъгълник $A_1A_2B_1B_2$);

3) тъй като алгебричният сбор от ориентираните лица на триъгълниците $XA_1A_2, XA_1B_2, XB_1B_2, XB_1A_2$ е равен на ориентираното лице на четириъгълник $A_1A_2B_1B_2$, то доказаната теорема означава, че ориентираното лице на четириъгълник $A_1A_2B_1B_2$ е равно на ориентираното лице на триъгълник, определен от векторите A_1B_1, A_2B_2 (по диагоналите на четириъгълник $A_1A_2B_1B_2$).

Извод. Теоремата и коментарът в предходните точки ни дават основание да кажем, че абсолютната стойност на детерминантата $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}$ е инварианта на диагоналната точкова конфигурация $A_1A_2B_1B_2$ с диагонали A_1B_1 и A_2B_2 .

3. Тримерно пространство

3.1. Детерминанта на наредена тройка вектори. Лема

Нека в пространството (3-мерно пространство) е въведена афинна координатна система.

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ са три вектора с координати съответно:

$$\mathbf{a}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}),$$

$$\mathbf{a}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}),$$

$$\mathbf{a}_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}).$$

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix}.$$

Детерминантите $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix}$ ще наричаме съответно **детерминанти** на наредените тройки вектори $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3), (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3), \dots, (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1)$.

Тъй като три обекта могат да бъдат наредени по $3!$ начина, то с тройката вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ можем да свържем 6 детерминанти от трети ред. Въпросните детерминанти се получават една от друга чрез размятане на редове и техните абсолютни стойности са равни.

Нека отбележим и някои непосредствени следствия от въведените определения и означения.

1) При размяна местата на два вектора детерминантата на системата променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

2) При замяна на един вектор с неговия противоположен детерминантата на системата променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ -\mathbf{a}_3 \end{vmatrix}, \text{ и т.н.}$$

Коментар. Известно е, че ако базата на координатната система определя тетраедър с обем 1, то детерминантата на тройката вектори $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ е равна на ориентирания обем на тетраедър, с определящи вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ (Gjonov & Stoev, 1994).

Лема (правило на триъгълника). Нека A, B и X са три точки с координати съответно: $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $X(x_1, x_2, x_3)$ и c_1, c_2 са два вектора с координати съответно $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13})$, $(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23})$. Нека векторите AX, XB, AB са образувани съответно от наредените двойки точки (A, X) , (X, B) , (A, B) . Тогава за детерминантите

$$\begin{vmatrix} AX \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} XB \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} AB \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ AX \\ c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 \\ XB \\ c_2 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} c_1 \\ AB \\ c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ AX \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ XB \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ AB \end{vmatrix}$$

са в сила равенствата:

$$\begin{vmatrix} AX \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AB \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ AX \\ c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 \\ XB \\ c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ AB \\ c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ AX \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ XB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ AB \end{vmatrix}.$$

Доказателство:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} AX \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 & x_2 - \alpha_2 & x_3 - \alpha_3 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 - x_1 & \beta_2 - x_2 & \beta_3 - x_3 \\ \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 + \beta_1 - x_1 & x_2 - \alpha_2 + \beta_2 - x_2 & x_3 - \alpha_3 + \beta_3 - x_3 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 - \alpha_3 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AB \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Останалите равенства се доказват по същия начин.

3.2. Векторна детерминанта на елементарна точкова конфигурация. Инварианта.

За целите на изложението да припомним понятието елементарна точкова конфигурация в пространството. И така: Нека A_1, A_2, A_3, A_4 са 4 точки в

пространството (3-мерно пространство). Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите 3 точки, получаваме шест отсечки: A_1A_2 , A_1A_3 , A_1A_4 , A_2A_3 , A_2A_4 , A_3A_4 . Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в тримерното пространство. Точките A_1 , A_2 , A_3 , A_4 ще наричаме **върхове**, а отсечките A_1A_2 , A_1A_3 , A_1A_4 , A_2A_3 , A_2A_4 , A_3A_4 ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

Нека в 3-мерно пространство е дадена елементарна точкова конфигурация $A_1A_2A_3A_4$ с върхове A_1 , A_2 , A_3 , A_4 и координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}), A_4(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}).$$

Да образуваме векторите A_1A_2 , A_1A_3 , A_1A_4 . Те имат координати съответно:

$$A_1A_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{11}, \alpha_{22} - \alpha_{12}, \alpha_{23} - \alpha_{13}),$$

$$A_1A_3 = (\alpha_{31} - \alpha_{11}, \alpha_{32} - \alpha_{12}, \alpha_{33} - \alpha_{13}),$$

$$A_1A_4 = (\alpha_{41} - \alpha_{11}, \alpha_{42} - \alpha_{12}, \alpha_{43} - \alpha_{13}).$$

Съгласно въведените определения и означения детерминантата на тройката вектори (A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4) има вида:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} - \alpha_{11} & \alpha_{22} - \alpha_{12} & \alpha_{23} - \alpha_{13} \\ \alpha_{31} - \alpha_{11} & \alpha_{32} - \alpha_{12} & \alpha_{33} - \alpha_{13} \\ \alpha_{41} - \alpha_{11} & \alpha_{42} - \alpha_{12} & \alpha_{43} - \alpha_{13} \end{vmatrix}.$$

Казано по-кратко:
$$\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ A_1A_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} - \alpha_{11} & \alpha_{22} - \alpha_{12} & \alpha_{23} - \alpha_{13} \\ \alpha_{31} - \alpha_{11} & \alpha_{32} - \alpha_{12} & \alpha_{33} - \alpha_{13} \\ \alpha_{41} - \alpha_{11} & \alpha_{42} - \alpha_{12} & \alpha_{43} - \alpha_{13} \end{vmatrix}.$$

Последното равенство ни дава основание да кажем, че детерминантата

$$\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ A_1A_4 \end{vmatrix} \text{ е детерминанта и на (елементарната) точкова конфигурация } A_1A_2A_3A_4.$$

Коментар. Известно е, че ако базата на координатната система определя тетраедър с обем 1 и $A_1A_2A_3A_4$ е тетраедър с върхове A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , то детер-

минантата $\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ A_1A_4 \end{vmatrix}$ на тройката (A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4) вектори е равна на ориенти-

рания обем на тетраедъра $A_1A_2A_3A_4$ (Gjonov & Stoev, 1994).

Тъй като четири обекта могат да бъдат наредени по 4! начина, то с елементарната точкова конфигурация $A_1A_2A_3A_4$ можем да свържем 24 детерминанти от трети ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ A_1 A_3 \\ A_1 A_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ A_1 A_4 \\ A_1 A_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} A_4 A_1 \\ A_4 A_2 \\ A_4 A_3 \end{vmatrix}.$$

Да отбележим, че въпросните детерминанти се получават една от друга чрез размятане на редове или изнасяне на знака „минус“ по редове и техните абсолютни стойности са равни.

Горните разсъждения ни дават основание абсолютната стойност на детер-

минантата $\begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ A_1 A_3 \\ A_1 A_4 \end{vmatrix}$ (или която и да е от останалите 23) да наречем **инварианта** на елементарната точкова конфигурация с върхове: A_1, A_2, A_3, A_4 .

3.3. Диагонална точкова конфигурация в тримерно пространство. Теорема (на Лалчев) за обем на октаедър. Инварианта.

В началото на точката ще въведем понятието **диагонална точкова конфигурация** в тримерно пространство.

Нека в тримерно пространство са дадени шест точки $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, които образуват наредена шесторка (в посочения ред). В този случай можем да считаме, че е дадена точкова конфигурация с **върхове** $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$.

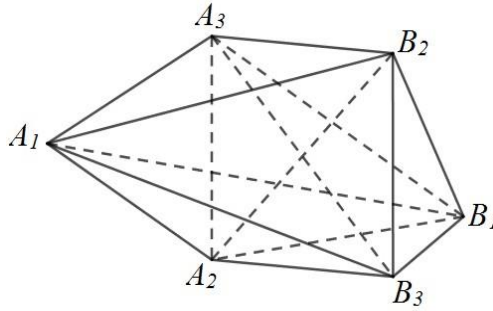
Нека върховете на конфигурацията $A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3$ са разделени на три двойки (A_1, B_1) , (A_2, B_2) и (A_3, B_3) . Точките на всяка от двойките (A_1, B_1) , (A_2, B_2) и (A_3, B_3) ще наричаме **противоположни** и всяка отсечка, определена от двойка противоположни върхове, ще наричаме **диагонал** на конфигурацията. (В случая отсечките $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$ са диагоналите на конфигурацията $A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3$.)

Всеки две точки, които не са противоположни, ще казваме, че са **съседни**, и отсечката, определена от двойка съседни точки, ще наричаме **ръб** на конфигурацията. (В случая, отсечките $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 B_2, A_1 B_3, A_2 A_3, A_2 B_1, A_2 B_3, A_3 B_1, A_3 B_2, B_1 B_2, B_1 B_3, B_2 B_3$ (общо 12 на брой) са ръбовете на конфигурацията $A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3$.)

Конфигурация от шест точки (в тримерното пространство) с фиксирани диагонали ще наричаме **диагонална точкова конфигурация**. (В случая конфигурацията от точките $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ е диагонална точкова конфигурация (с диагонали $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$)).

Ще предполагаме, че в тримерното пространство триъгълниците, определени от тройките точки, във всяка от които точките са две по две съседни, „ограждат“ съответната диагоналната точкова конфигурация. (В случая триъгълниците, които „ограждат“ диагоналната точкова конфигурация, са осем на брой, а именно: $A_1 A_2 A_3, A_1 A_2 B_3, A_1 B_2 A_3, A_1 B_2 B_3, B_1 A_2 A_3, B_1 A_2 B_3, B_1 B_2 A_3, B_1 B_2 B_3$.)

Забележка. В тримерното пространство съществува множество от точки, което отговаря на определението диагонална точкова конфигурация. Като пример за такава конфигурация може да послужи октаедър с върхове $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ и диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 , (черт. 3).



Чертеж 3

Теорема. Нека в пространството (3-мерно пространство) е дадена афинна координатна система. Нека точките $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ са върхове на (диагонална) точкова конфигурация с диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 и X е произволна точка. Тогава за детерминантите на елементарните точкови конфигурации:

$$\begin{aligned} &XA_1A_2A_3, XA_1A_2B_3, XA_1B_2A_3, XA_1B_2B_3, \\ &XB_1A_2A_3, XB_1B_2A_3, XB_1B_2B_3, \end{aligned}$$

и диагоналната конфигурация $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ е в сила равенството:

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \end{vmatrix}.$$

Доказателство:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix} = \\ &(\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix}) + (-\begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix}) + (-\begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \end{vmatrix}) + (\begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \end{vmatrix}) = \\ &= \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} = (\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix}) + (-\begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ B_3A_3 \end{vmatrix}) = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3\mathbf{A}_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{XB}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3\mathbf{A}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3\mathbf{A}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \end{vmatrix}.$$

Коментари

Равенството в теоремата се „конструира“, като се приложи „матричен“ принцип за построяване на вариациите от два елемента трети клас с повторение. По-конкретно:

1) Първите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторът $\mathbf{XA}_1$ се запише последователно 4 ($= 2^2$) пъти и след това на същия ред се запише векторът $\mathbf{XB}_1$ също 4 ($= 2^2$) пъти, т.е.

$$\mathbf{XA}_1\mathbf{XA}_1\mathbf{XA}_1\mathbf{XA}_1\mathbf{XB}_1\mathbf{XB}_1\mathbf{XB}_1\mathbf{XB}_1.$$

2) Вторите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторът $\mathbf{XA}_2$ се запише 2 ($= 2^1$) пъти, след това векторът $\mathbf{XB}_2$ се запише 2 ($= 2^1$) пъти, след това векторът $\mathbf{XA}_2$ се запише още 2 пъти и накрая векторът $\mathbf{XB}_2$ се запише още 2 пъти, т.е.

$$\mathbf{XA}_2\mathbf{XA}_2\mathbf{XB}_2\mathbf{XB}_2\mathbf{XA}_2\mathbf{XA}_2\mathbf{XB}_2\mathbf{XB}_2.$$

3) Третите редове на детерминантите от лявата страна се получават, като векторите $\mathbf{XA}_3$ и $\mathbf{XB}_3$ се запишат по 4 пъти, редувайки се, т.е.

$$\mathbf{XA}_3\mathbf{XB}_3\mathbf{XA}_3\mathbf{XB}_3\mathbf{XA}_3\mathbf{XB}_3\mathbf{XA}_3\mathbf{XB}_3.$$

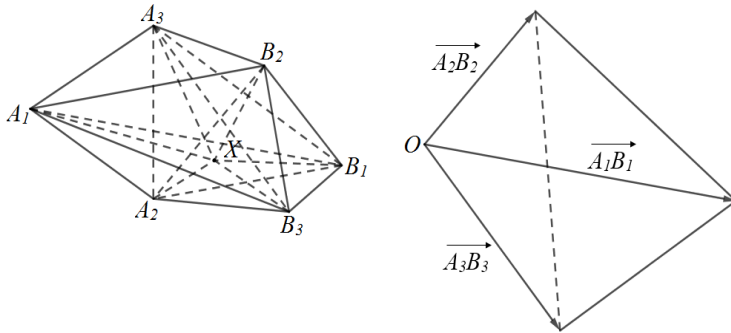
4) В резултат на действията в предходните точки се достига до детерминантите

$$\begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XA}_2 \\ \mathbf{XA}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XA}_2 \\ \mathbf{XB}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XB}_2 \\ \mathbf{XA}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XB}_2 \\ \mathbf{XB}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XB}_1 \\ \mathbf{XA}_2 \\ \mathbf{XA}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XB}_1 \\ \mathbf{XA}_2 \\ \mathbf{XB}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XB}_1 \\ \mathbf{XB}_2 \\ \mathbf{XA}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XB}_1 \\ \mathbf{XB}_2 \\ \mathbf{XB}_3 \end{vmatrix}.$$

5) Знаците пред събираемите в алгебричния сбор се определят от броя на буквата „В“ в съответната детерминанта. Ако буквата „В“ участва четно число пъти, знакът е „+“, ако буквата „В“ участва нечетно число пъти, знакът е „-“.

6) Дясната страна е $\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \end{vmatrix}.$

Нека $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ е октаедър с върхове: $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, диагонали A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (и ръбове $A_1A_2, A_1A_3, A_1B_2, A_1B_3, A_2A_3, A_2B_1, A_2B_3, A_3B_1, A_3B_2, B_1B_2, A_1B_3, B_2B_3$ и стени $A_1A_2A_3, A_1A_2B_3, A_1B_2A_3, A_1B_2B_3, B_1A_2A_3, B_1A_2B_3, B_1B_2A_3, B_1B_2B_3$) и X е произволна точка (черт. 4).



Чертеж 4

Във връзка с доказаната теорема ще кажем следното.

1) Точката X разделя октаедъра $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ на 8 тетраедъра $XA_1A_2A_3$, $XA_1A_2B_3$, $XA_1B_2A_3$, $XA_1B_2B_3$, $XB_1A_2A_3$, $XB_1A_2B_3$, $XB_1B_2A_3$, $XB_1B_2B_3$.

2) Алгебричният сбор от ориентираните обеми на тетраедрите $XA_1A_2A_3$, $XA_1A_2B_3$, $XA_1B_2A_3$, $XA_1B_2B_3$, $XB_1A_2A_3$, $XB_1A_2B_3$, $XB_1B_2A_3$, $XB_1B_2B_3$ не зависи от точката X и е равен на ориентирания обем на тетраедър, определен от векторите A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 (по диагоналите на октаедър $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$).

3) Тъй като алгебричният сбор от ориентираните обеми на тетраедрите $XA_1A_2A_3$, $XA_1A_2B_3$, $XA_1B_2A_3$, $XA_1B_2B_3$, $XB_1A_2A_3$, $XB_1A_2B_3$, $XB_1B_2A_3$, $XB_1B_2B_3$ е равен на ориентирания обем на октаедър $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$, то теоремата означава, че ориентираният обем на октаедър $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ е равен на ориентирания обем на тетраедър, определен от векторите A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 (по диагоналите на октаедър $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$).

Извод. Теоремата и коментарът в предходните точки ни дават основание да кажем, че абсолютната стойност на детерминантата $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \end{vmatrix}$ е инварианта на диагоналната точкова конфигурация $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ с диагонали A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 .

4. Четиримерно пространство

4.1. Детерминанта на наредена четворка вектори. Лема

Нека в 4-мерно пространство е дадена афинна координатна система.

Нека a_1, a_2, a_3, a_4 са четири вектора с координати съответно:

$$a_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}),$$

$$a_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}), \\ \mathbf{a}_4 &= (\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}). \end{aligned}$$

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix}.$$

Детерминантите $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{vmatrix}$ ще наричаме, съответно детер-

минанти на наредените четворки вектори $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4), (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4), \dots, (\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1)$.

Тъй като четири обекта могат да бъдат наредени по 4! начина, то с четворката вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ можем да свържем 24 детерминанти от четвърти ред. Но въпросните детерминанти се получават една от друга чрез размяна на редове, откъдето техните абсолютни стойности са равни.

Нека отбележим и някои непосредствени следствия от въведените определения и означения.

1) При размяна местата на два вектора детерминантата на наредената четворка променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

2) При замяна на един вектор с неговия противоположен детерминантата на наредената четворка променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ -\mathbf{a}_4 \end{vmatrix} \text{ и т.н.}$$

Лема (правило на триъгълника). Нека A, B и X са три точки с координати съответно: $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ са три вектора с координати съответно: $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14})$, $(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23}, \gamma_{24})$, $(\gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{33}, \gamma_{34})$. Нека векторите $\mathbf{AX}, \mathbf{XB}, \mathbf{AB}$ са образувани съответно от

наредените двойки точки (A, X), (X, B), (A, B). Тогава за детерминантите

$$\begin{vmatrix} \textcolor{red}{AX} & \textcolor{red}{XB} & \textcolor{red}{AB} \\ c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & \textcolor{red}{AX} \\ c_2 & \textcolor{red}{XB} \\ c_3 & \textcolor{red}{AB} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & \textcolor{red}{AX} & \textcolor{red}{XB} \\ c_3 & \textcolor{red}{AB} & \textcolor{red}{AB} \end{vmatrix}$$

са в сила равенствата:

$$\begin{vmatrix} \textcolor{red}{AX} & \textcolor{red}{XB} & \textcolor{red}{AB} \\ c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & \textcolor{red}{AX} \\ c_2 & \textcolor{red}{XB} \\ c_3 & \textcolor{red}{AB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & \textcolor{red}{AX} & \textcolor{red}{XB} \\ c_3 & \textcolor{red}{AB} & \textcolor{red}{AB} \end{vmatrix}$$

Доказателство:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \textcolor{red}{AX} & \textcolor{red}{XB} \\ c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 & x_2 - \alpha_2 & x_3 - \alpha_3 & x_4 - \alpha_4 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 - x_1 & \beta_2 - x_2 & \beta_3 - x_3 & \beta_4 - x_4 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 + \beta_1 - x_1 & x_2 - \alpha_2 + \beta_2 - x_2 & x_3 - \alpha_3 + \beta_3 - x_3 & x_4 - \alpha_4 + \beta_4 - x_4 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 - \alpha_3 & \beta_4 - \alpha_4 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textcolor{red}{AB} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Останалите равенства се доказват по същия начин.

4.2. Векторна детерминанта на елементарна точкова конфигурация. Инварианта

За целите на изложението да припомним понятието елементарна точкова конфигурация в четиримерно пространство. И така: нека A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 са пет точки в четиримерно пространство. Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите 4 точки, получаваме 10 отсечки: $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5$. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в четиримерното пространство. Точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ще наричаме **върхове**, а отсечките $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5$ ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

Нека в 4-мерно пространство е дадена елементарна точкова конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}), \\ A_4(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}), A_5(\alpha_{51}, \alpha_{52}, \alpha_{53}, \alpha_{54}).$$

Да образуваме векторите $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5$. Те имат координати съответно:

$$A_1A_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{11}, \alpha_{22} - \alpha_{12}, \alpha_{23} - \alpha_{13}, \alpha_{24} - \alpha_{14}), \\ A_1A_3 = (\alpha_{31} - \alpha_{11}, \alpha_{32} - \alpha_{12}, \alpha_{33} - \alpha_{13}, \alpha_{34} - \alpha_{14}), \\ A_1A_4 = (\alpha_{41} - \alpha_{11}, \alpha_{42} - \alpha_{12}, \alpha_{43} - \alpha_{13}, \alpha_{44} - \alpha_{14}), \\ A_1A_5 = (\alpha_{51} - \alpha_{11}, \alpha_{52} - \alpha_{12}, \alpha_{53} - \alpha_{13}, \alpha_{54} - \alpha_{14}).$$

Съгласно въведените определения и означения детерминантата на четворката вектори $(A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5)$ има вида:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} - \alpha_{11} & \alpha_{22} - \alpha_{12} & \alpha_{23} - \alpha_{13} & \alpha_{24} - \alpha_{14} \\ \alpha_{31} - \alpha_{11} & \alpha_{32} - \alpha_{12} & \alpha_{33} - \alpha_{13} & \alpha_{34} - \alpha_{14} \\ \alpha_{41} - \alpha_{11} & \alpha_{42} - \alpha_{12} & \alpha_{43} - \alpha_{13} & \alpha_{44} - \alpha_{14} \\ \alpha_{51} - \alpha_{11} & \alpha_{52} - \alpha_{12} & \alpha_{53} - \alpha_{13} & \alpha_{54} - \alpha_{14} \end{vmatrix}.$$

Казано по друг начин:

$$\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ A_1A_4 \\ A_1A_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} - \alpha_{11} & \alpha_{22} - \alpha_{12} & \alpha_{23} - \alpha_{13} & \alpha_{24} - \alpha_{14} \\ \alpha_{31} - \alpha_{11} & \alpha_{32} - \alpha_{12} & \alpha_{33} - \alpha_{13} & \alpha_{34} - \alpha_{14} \\ \alpha_{41} - \alpha_{11} & \alpha_{42} - \alpha_{12} & \alpha_{43} - \alpha_{13} & \alpha_{44} - \alpha_{14} \\ \alpha_{51} - \alpha_{11} & \alpha_{52} - \alpha_{12} & \alpha_{53} - \alpha_{13} & \alpha_{54} - \alpha_{14} \end{vmatrix}.$$

Тъй като пет обекта могат да бъдат наредени по 5! начина, то с петорката точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 можем да свържем 120 детерминати от четвърти ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ A_1A_4 \\ A_1A_5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1A_3 \\ A_1A_2 \\ A_1A_4 \\ A_1A_5 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} A_5A_4 \\ A_5A_3 \\ A_5A_2 \\ A_5A_1 \end{vmatrix}.$$

Да отбележим, че въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове или изнасяне на знака „минус“ по редове и техните абсолютни стойности са равни.

Горните разсъждения ни дават основание абсолютната стойност на детер-

минантата $\begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ A_1 A_3 \\ A_1 A_4 \\ A_1 A_5 \end{vmatrix}$ (или която и да е от останалите 119) да наречем **инвариан-**

та на елементарната точкова конфигурация с върхове A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

4.3. Диагонална точкова конфигурация в четиримерно пространство.

Теорема. Инварианта

В началото на точката ще въведем понятието **диагонална точкова конфигурация** в четиримерно пространство.

Нека в четиримерното пространство са дадени осем точки $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$, които образуват наредена осморка (в посочения ред). В този случай можем да считаме, че е дадена точкова конфигурация с **върхове** $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$.

Нека върховете на конфигурацията $(A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4)$ са разделени на четири двойки – (първа, трета), (втора, четвърта), (трета, шеста) и (четвърта, осма), т.е. $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3)$ и (A_4, B_4) . Точките на всяка от двойките $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4)$ ще наричаме **противоположни** и всяка отсечка, определена от двойка противоположни върхове, ще наричаме **диагонал** на конфигурацията. (В случая отсечките $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ са диагоналите на конфигурацията $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$.)

Всеки две точки, които не са противоположни, ще казваме, че са **съседни** и отсечка, определена от двойка съседни точки, ще наричаме **ръб** на конфигурацията. (В случая отсечките: $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1B_2, A_1B_3, A_1B_4, A_2A_3, A_2A_4, A_2B_1, A_2B_3, A_2B_4, A_3A_4, A_3B_1, A_3B_2, A_3B_4, A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3, B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4$ (общо 24 на брой) са ръбовете на конфигурацията.)

Конфигурация от осем точки (в четиримерно пространство) с фиксирани диагонали ще наричаме **диагонална точкова конфигурация**. (В случая конфигурацията от точките $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ е диагонална точкова конфигурация (с диагонали $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$.)

Ще предполагаме, че в четиримерно пространство „тетраедрите“, определени от четворките точки, във всяка от които точките са две по две съседни, „ограждат“ съответната диагоналната точкова конфигурация. (В случая тетраедрите, които „ограждат“ конфигурацията, са общо 16, а именно: $A_1A_2A_3A_4, A_1A_2A_3B_4, A_1A_2B_3A_4, A_1A_2B_3B_4, A_1B_2A_3A_4, A_1B_2A_3B_4, A_1B_2B_3A_4, A_1B_2B_3B_4, B_1A_2A_3A_4, B_1A_2A_3B_4, B_1A_2B_3A_4, B_1A_2B_3B_4, B_1B_2A_3A_4, B_1B_2A_3B_4, B_1B_2B_3A_4, B_1B_2B_3B_4$.)

Теорема. Нека в четиримерно пространство е дадена афинна координатна система. Нека точките $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ са върхове на (диагонална) точкова конфигурация с диагонали $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ и X е произволна точка. Тогава за детерминантите на елементарните точкови конфигурации:

$$\begin{aligned} &XA_1A_2A_3A_4, XA_1A_2A_3B_4, XA_1A_2B_3A_4, XA_1A_2B_3B_4, \\ &XA_1B_2A_3A_4, XA_1B_2A_3B_4, XA_1B_2B_3A_4, XA_1B_2B_3B_4, \\ &XB_1A_2A_3A_4, XB_1A_2A_3B_4, XB_1A_2B_3A_4, XB_1A_2B_3B_4, \\ &XB_1B_2A_3A_4, XB_1B_2A_3B_4, XB_1B_2B_3A_4, XB_1B_2B_3B_4 \end{aligned}$$

и диагоналната конфигурация $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ е в сила равенството:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \\ &- \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \\ A_4B_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Доказателство:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \\ &- \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XA_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ XB_4 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XB_2 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XB_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XA_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ B_3A_3 \\ B_4A_4 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3\mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B}_4\mathbf{A}_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{XB}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3\mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B}_4\mathbf{A}_4 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3\mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B}_4\mathbf{A}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \\ \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Коментари

Равенството в теоремата се „конструира“, като се приложи „матричен“ принцип за построяване на вариациите от два елемента четвърти клас с повторение. По-конкретно:

1) Първите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторът $\mathbf{XA}_1$ се запише $8 (= 2^3)$ пъти последователно и след това на същия ред се запише векторът $\mathbf{XB}_1$ също $8 (= 2^3)$ пъти последователно, т.е. $\mathbf{XA}_1\mathbf{XA}_1\mathbf{XA}_1\mathbf{XA}_1\mathbf{XA}_1\mathbf{XA}_1\mathbf{XA}_1\mathbf{XA}_1\mathbf{XB}_1\mathbf{XB}_1\mathbf{XB}_1\mathbf{XB}_1\mathbf{XB}_1\mathbf{XB}_1\mathbf{XB}_1\mathbf{XB}_1$.

2) Вторите редове на детерминантите от лявата страна на равенството се получават, като векторът $\mathbf{XA}_2$ се запише $4 (= 2^2)$ пъти последователно, след това векторът $\mathbf{XB}_2$ се запише $4 (= 2^2)$ пъти последователно, след което получената редица се запише още веднъж (общо 2 пъти), т.е. $\mathbf{XA}_2\mathbf{XA}_2\mathbf{XA}_2\mathbf{XA}_2\mathbf{XB}_2\mathbf{XB}_2\mathbf{XB}_2\mathbf{XB}_2\mathbf{XA}_2\mathbf{XA}_2\mathbf{XA}_2\mathbf{XB}_2\mathbf{XB}_2\mathbf{XB}_2\mathbf{XB}_2$.

3) Третите редове на детерминантите от лявата страна се получават, като векторът $\mathbf{XA}_3$ се запише $2 (= 2^1)$ пъти последователно, след това векторът $\mathbf{XB}_3$ се запише $2 (= 2^1)$ пъти последователно, след което получената редица се запише още 3 пъти (общо 4 пъти), т.е. $\mathbf{XA}_3\mathbf{XA}_3\mathbf{XB}_3\mathbf{XB}_3\mathbf{XA}_3\mathbf{XA}_3\mathbf{XB}_3\mathbf{XB}_3\mathbf{XA}_3\mathbf{XA}_3\mathbf{XB}_3\mathbf{XB}_3\mathbf{XA}_3\mathbf{XA}_3\mathbf{XB}_3\mathbf{XB}_3$.

4) Четвъртите редове на детерминантите от лявата страна се получават, като векторът $\mathbf{XA}_4$ се запише веднъж, след което векторът $\mathbf{XB}_4$ се запише веднъж и получената редица се запише още 7 пъти (общо 8) пъти, т.е. $\mathbf{XA}_4\mathbf{XB}_4\mathbf{XA}_4\mathbf{XB}_4\mathbf{XA}_4\mathbf{XB}_4\mathbf{XA}_4\mathbf{XB}_4\mathbf{XA}_4\mathbf{XB}_4\mathbf{XA}_4\mathbf{XB}_4\mathbf{XA}_4\mathbf{XB}_4\mathbf{XA}_4\mathbf{XB}_4$.

5) В резултат на действията в предходните точки се достига до детерминантите:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XA}_2 \\ \mathbf{XA}_3 \\ \mathbf{XA}_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XA}_2 \\ \mathbf{XA}_3 \\ \mathbf{XB}_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XA}_2 \\ \mathbf{XB}_3 \\ \mathbf{XA}_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XA}_2 \\ \mathbf{XB}_3 \\ \mathbf{XB}_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XB}_2 \\ \mathbf{XA}_3 \\ \mathbf{XA}_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XB}_2 \\ \mathbf{XA}_3 \\ \mathbf{XB}_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XB}_2 \\ \mathbf{XB}_3 \\ \mathbf{XA}_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{XA}_1 \\ \mathbf{XB}_2 \\ \mathbf{XB}_3 \\ \mathbf{XB}_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} XB_1 & XB_1 & XB_1 & XB_1 & XB_1 & XB_1 & XB_1 & XB_1 \\ XA_2 & XA_2 & XA_2 & XA_2 & XB_2 & XB_2 & XB_2 & XB_2 \\ XA_3 & XA_3 & XB_3 & XB_3 & XA_3 & XA_3 & XB_3 & XB_3 \\ XA_4 & XB_4 & XA_4 & XB_4 & XA_4 & XB_4 & XA_4 & XB_4 \end{vmatrix}.$$

6) Знаците пред събираемите в алгебричния сбор се определят от броя на буквите „В“ в съответната детерминанта. Ако буквата „В“ участва четно число пъти, знакът е „+“, ако буквата „В“ участва нечетно число пъти, знакът е „-“.

7) Дясната страна е
$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \\ A_3 B_3 \\ A_4 B_4 \end{vmatrix}.$$

Нека множество от пет точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (елементарна точкова конфигурация) и определените от тях 10 отсечки – $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_4A_5$ наречем

симплекс в четиримерното пространство, а детерминанта
$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ A_1 A_3 \\ A_1 A_4 \\ A_1 A_5 \end{vmatrix}$$
 наречем

„ориентиран обем“ на симплекса $A_1A_2A_3A_4A_5$. Тогава теоремата придобива геометричен смисъл, който ще поясним по-долу.

Нека $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ е диагонална точкова конфигурация с върхове: $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$, диагонали: $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ (и ръбове: $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1B_2, A_1B_3, A_1B_4, A_2A_3, A_2A_4, A_2B_1, A_2B_3, A_2B_4, A_3A_4, A_3B_1, A_3B_2, A_3B_4, A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3, B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4$ и „стени“: $A_1A_2A_3A_4, A_1A_2A_3B_4, A_1A_2B_3A_4, A_1A_2B_3B_4, A_1B_2A_3A_4, A_1B_2A_3B_4, A_1B_2B_3A_4, A_1B_2B_3B_4, B_1A_2A_3A_4, B_1A_2A_3B_4, B_1A_2B_3A_4, B_1A_2B_3B_4, B_1B_2A_3A_4, B_1B_2A_3B_4, B_1B_2B_3A_4, B_1B_2B_3B_4$) и X е произволна точка. Тогава:

1) Точката X разделя конфигурацията $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ на 16 симплекса – $XA_1A_2A_3A_4, XA_1A_2A_3B_4, XA_1A_2B_3A_4, XA_1A_2B_3B_4, XA_1B_2A_3A_4, XA_1B_2A_3B_4, XA_1B_2B_3A_4, XA_1B_2B_3B_4, XB_1A_2A_3A_4, XB_1A_2A_3B_4, XB_1A_2B_3A_4, XB_1A_2B_3B_4, XB_1B_2A_3A_4, XB_1B_2A_3B_4, XB_1B_2B_3A_4, XB_1B_2B_3B_4$.

2) Алгебричният сбор от ориентираните обеми на симплексите от 1) не зависи от точката X и е равен на ориентирания обем на симплекс, определен от векторите $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ (по диагоналите на конфигурацията $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$).

3) Тъй като алгебричният сбор от ориентираните обеми на симплексите от 1) е равен на ориентирания обем на диагоналната точкова конфигурация $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$, то теоремата означава, че ориентираният обем на конфи-

гурацията $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ е равен на ориентирания обем на симплекс, определен от векторите $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ (по диагоналите на конфигурацията $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$).

Извод. Теоремата и коментарът ни дават основание да кажем, че абсолют-

ната стойност на детерминантата $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \\ A_4B_4 \end{vmatrix}$ е инварианта на диагоналната

точкова конфигурация $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ с диагонали $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$.

5. N -мерно пространство

5.1. Детерминанта на наредена n -орка вектори. Лема

Нека в n -мерно пространство е дадена афинна координатна система.

Нека $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ са n вектора с координати съответно:

$$a_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n}),$$

$$a_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n}),$$

$$a_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{3n}),$$

.....

$$a_n = (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \dots, \alpha_{nn}).$$

Да въведем следните означения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}.$$

Детерминантата $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}$ ще наричаме съответно **детерминанта** на наредена-

та n -орка вектори $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.

Тъй като n обекта могат да бъдат наредени по $n!$ начина, то с n -орката вектори $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ можем да свържем $n(n-1)\dots 3.2.1$ детерминанти от n -ти ред. Тъй като въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове, то техните абсолютни стойности са равни.

Нека отбележим и някои непосредствени следствия от въведените определения и означения.

1) При размяна местата на два вектора детерминантата на наредената четворка променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}.$$

2) При замяна на един вектор с неговия противоположен детерминантата на наредената четворка променя своя „знак“. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}.$$

Лема (правило на триъгълника). Нека А, В и Х са три точки с координати съответно: $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n)$, $X(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ и $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$ са $n-1$ вектора с координати съответно: $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \dots, \gamma_{1n})$, $(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23}, \dots, \gamma_{2n})$, $(\gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{33}, \dots, \gamma_{3n})$, ..., $(\gamma_{n-11}, \gamma_{n-12}, \gamma_{n-13}, \dots, \gamma_{n-1n})$. Нека векторите **AX, XB, AB** са образувани съответно от наредените двойки точки (А, Х), (Х, В), (А, В). Тогава за детерминантите:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{AX} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{XB} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \mathbf{AB} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ \mathbf{AX} \\ c_3 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 \\ \mathbf{XB} \\ c_3 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} c_1 \\ \mathbf{AB} \\ c_3 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}; \dots; \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \mathbf{XB} \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \mathbf{AB} \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}$$

са в сила равенствата:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{AX} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{XB} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{AB} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 \\ \mathbf{AX} \\ c_3 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 \\ \mathbf{XB} \\ c_3 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ \mathbf{AB} \\ c_3 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}; \dots; \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \mathbf{AX} \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \mathbf{XB} \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \mathbf{AB} \\ \dots \\ c_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{c} \textcolor{red}{AX} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \textcolor{red}{AX} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcolor{red}{XB} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \textcolor{red}{XB} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{array} \right| = \\
 & = \left| \begin{array}{c} x_1 - \alpha_1 \quad x_2 - \alpha_2 \quad x_3 - \alpha_3 \quad \dots \quad x_n - \alpha_n \\ \gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{13} \quad \dots \quad \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} \gamma_{22} \gamma_{23} \quad \dots \quad \gamma_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \gamma_{n-11} \gamma_{n-12} \gamma_{n-13} \quad \dots \quad \gamma_{n-1n} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \beta_1 - x_1 \quad \beta_2 - x_2 \quad \beta_3 - x_3 \quad \dots \quad \beta_n - x_n \\ \gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{13} \quad \dots \quad \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} \gamma_{22} \gamma_{23} \quad \dots \quad \gamma_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \gamma_{n-11} \gamma_{n-12} \gamma_{n-13} \quad \dots \quad \gamma_{n-1n} \end{array} \right| = \\
 & = \left| \begin{array}{c} x_1 - \alpha_1 + \beta_1 - x_1 \quad x_2 - \alpha_2 + \beta_2 - x_2 \quad x_3 - \alpha_3 + \beta_3 - x_3 \quad \dots \quad x_n - \alpha_n + \beta_n - x_n \\ \gamma_{11} \quad \gamma_{12} \gamma_{13} \quad \dots \quad \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} \quad \gamma_{22} \gamma_{23} \quad \dots \quad \gamma_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \gamma_{n-11} \quad \gamma_{n-12} \gamma_{n-13} \quad \dots \quad \gamma_{n-1n} \end{array} \right| = \\
 & = \left| \begin{array}{c} \beta_1 - \alpha_1 \quad \beta_2 - \alpha_2 \quad \beta_3 - \alpha_3 \quad \dots \quad \beta_n - \alpha_n \\ \gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{13} \quad \dots \quad \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} \gamma_{22} \gamma_{23} \quad \dots \quad \gamma_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \gamma_{n-11} \gamma_{n-12} \gamma_{n-13} \quad \dots \quad \gamma_{n-1n} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \textcolor{red}{AB} \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{array} \right|.
 \end{aligned}$$

Останалите равенства се доказват по същия начин.

5.2. Векторна детерминанта на елементарна точкова конфигурация. Инварианта

За целите на изложението да припомним понятието елементарна точкова конфигурация в n -мерно пространство. И така: Нека $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ са $n + 1$ точки в n -мерно пространство. Като свържем с отсечка всяка една от точките с останалите n точки, получаваме $\frac{n(n+1)n(n+1)}{2 \quad 2}$ отсечки: $A_1 A_2,$

$A_1A_3, \dots, A_1A_n, A_1A_{n+1}, A_2A_3, \dots, A_2A_n, A_2A_{n+1}, \dots, A_nA_{n+1}$. Така получената конфигурация ще наричаме **елементарна точкова конфигурация** в n -мерно пространство. Точките $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ ще наричаме **върхове**, а отсечките $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_n, A_1A_{n+1}, A_2A_3, \dots, A_2A_n, A_2A_{n+1}, \dots, A_nA_{n+1}$ ще наричаме **ръбове** на конфигурацията.

Нека в n -мерно пространството е дадена елементарна точкова конфигурация $A_1A_2A_3 \dots A_nA_{n+1}$ с върхове $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ и координати съответно:

$$A_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n}), A_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n}), A_3(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{3n}), \dots \\ \dots A_n(\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \dots, \alpha_{nn}), A_{n+1}(\alpha_{n+11}, \alpha_{n+12}, \alpha_{n+13}, \dots, \alpha_{n+1n}).$$

Да образуваме векторите $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_n, A_1A_{n+1}$. Те имат координати съответно:

$$A_1A_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{11}, \alpha_{22} - \alpha_{12}, \alpha_{23} - \alpha_{13}, \dots, \alpha_{2n} - \alpha_{1n}),$$

$$A_1A_3 = (\alpha_{31} - \alpha_{11}, \alpha_{32} - \alpha_{12}, \alpha_{33} - \alpha_{13}, \dots, \alpha_{3n} - \alpha_{1n}),$$

.....

$$A_1A_n = (\alpha_{n1} - \alpha_{11}, \alpha_{n2} - \alpha_{12}, \alpha_{n3} - \alpha_{13}, \dots, \alpha_{nn} - \alpha_{1n}),$$

$$A_1A_{n+1} = (\alpha_{n+11} - \alpha_{11}, \alpha_{n+12} - \alpha_{12}, \alpha_{n+13} - \alpha_{13}, \dots, \alpha_{n+1n} - \alpha_{1n}).$$

Съгласно въведените определения и означения детерминантата на n -орката вектори $(A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_n, A_1A_{n+1})$ има вида:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} - \alpha_{11} & \alpha_{22} - \alpha_{12} & \alpha_{23} - \alpha_{13} & \dots & \alpha_{2n} - \alpha_{1n} \\ \alpha_{31} - \alpha_{11} & \alpha_{32} - \alpha_{12} & \alpha_{33} - \alpha_{13} & \dots & \alpha_{3n} - \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} - \alpha_{11} & \alpha_{n2} - \alpha_{12} & \alpha_{n3} - \alpha_{13} & \dots & \alpha_{n4} - \alpha_{1n} \\ \alpha_{n+11} - \alpha_{11} & \alpha_{n+12} - \alpha_{12} & \alpha_{n+13} - \alpha_{13} & \dots & \alpha_{n+14} - \alpha_{n+1n} \end{vmatrix}.$$

Или:

$$\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ \dots \\ A_1A_n \\ A_1A_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} - \alpha_{11} & \alpha_{22} - \alpha_{12} & \alpha_{23} - \alpha_{13} & \dots & \alpha_{2n} - \alpha_{1n} \\ \alpha_{31} - \alpha_{11} & \alpha_{32} - \alpha_{12} & \alpha_{33} - \alpha_{13} & \dots & \alpha_{3n} - \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} - \alpha_{11} & \alpha_{n2} - \alpha_{12} & \alpha_{n3} - \alpha_{13} & \dots & \alpha_{n4} - \alpha_{1n} \\ \alpha_{n+11} - \alpha_{11} & \alpha_{n+12} - \alpha_{12} & \alpha_{n+13} - \alpha_{13} & \dots & \alpha_{n+14} - \alpha_{n+1n} \end{vmatrix}.$$

Тъй като $n+1$ обекта могат да бъдат наредени по $(n+1)!$ начина, то с $n+1$ -орката точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ можем да свържем $(n+1)n(n-1) \dots 3.2.1$ детерминанти от n -ти ред, а именно:

$$\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ A_1A_3 \\ \dots \\ A_1A_n \\ A_1A_{n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1A_3 \\ A_1A_2 \\ \dots \\ A_1A_n \\ A_1A_{n+1} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} A_{n+1}A_n \\ A_{n+1}A_{n-1} \\ \dots \\ A_{n+1}A_2 \\ A_{n+1}A_1 \end{vmatrix}.$$

Да отбележим, че въпросните детерминанти се получават една от друга чрез разместване на редове или изнасяне на знака „минус“ по редове и техните абсолютни стойности са равни.

Горните разсъждения ни дават основание абсолютната стойност на детер-

минантата $\begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ A_1 A_3 \\ \dots \\ A_1 A_n \\ A_1 A_{n+1} \end{vmatrix}$ (или която и да е от останалите $(n+1)! - 1$) да наречем

инварианта на елементарната точкова конфигурация с върхове $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$.

5.3. Диагонална точкова конфигурация в n -мерно пространство. Хипотеза. Инварианта

В началото на точката ще въведем понятието **диагонална точкова конфигурация** в n -мерно пространство.

Нека в n -мерно пространство са дадени $2n$ точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n$, които образуват наредена $2n$ -орка (в посочения ред). В този случай можем да считаме, че е дадена точкова конфигурация с **върхове** $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n$.

Нека върховете на конфигурацията $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n)$ са разделени на n двойки $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), \dots, (A_{n-1}, B_{n-1}), (A_n, B_n)$. Точките на всяка от двойките $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), \dots, (A_{n-1}, B_{n-1}), (A_n, B_n)$ ще наричаме **противоположни** и всяка отсечка, определена от двойка противоположни върхове, ще наричаме **диагонал** на конфигурацията. (В случая отсечките $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots, A_{n-1} B_{n-1}, A_n B_n$ са диагоналите на конфигурацията $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n B_1 B_2 B_3 \dots B_{n-1} B_n$.)

Всеки две точки, които не са противоположни, ще казваме, че са **съседни**, и отсечка, определена от двойка съседни точки, ще наричаме **ръб** на конфигурацията.

(В случая $(A_1, A_2), (A_1, A_3), \dots, (A_1, A_n), (A_1, B_2), (A_1, B_3), \dots, (A_1, B_n), (A_2, A_3), \dots, (A_2, A_n), (A_2, B_1), (A_2, B_3), \dots, (A_2, B_n), (A_3, A_4), \dots, (A_3, A_n), (A_3, B_1), (A_3, B_2), (A_3, B_4), \dots, (A_3, B_n), \dots, (A_n, B_1), (A_n, B_2), \dots, (A_n, B_{n-1}), (B_1, B_2), (B_1, B_3), \dots, (B_1, B_n), (B_2, B_3), \dots, (B_2, B_n), (B_3, B_4), \dots, (B_3, B_n), \dots, (B_{n-1}, B_n)$ са двойките съседни точки

и съответните отсечки (общо $\frac{2n(2n-1)}{2} - n = 2n(n-1)$) са ръбовете

на конфигурацията.

Конфигурация от $2n$ точки (в n -мерно пространство) с фиксирани диагонали ще наричаме **диагонална точкова конфигурация**. (В случая конфигу-

рацията от точките $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ е диагонална точкова конфигурация (с диагонали $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots, A_n B_n$.)

Ще предполагаме, че в n -мерното пространство „симплексите“, определени от n -орките точки, във всяка от които точките са две по две съседни, „ограждат“ съответната диагоналната точкова конфигурация. (В случая „симплексите“, които „ограждат“ конфигурацията, са общо 2^n , а именно $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n, A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} B_n, A_1 A_2 A_3 \dots B_{n-1} A_n, A_1 A_2 A_3 \dots B_{n-1} B_n, \dots, A_1 A_2 B_3 \dots A_{n-1} A_n, \dots, A_1 A_2 B_3 \dots B_{n-1} A_n, A_1 A_2 B_3 \dots B_{n-1} B_n, A_1 B_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n, A_1 B_2 A_3 \dots A_{n-1} B_n, A_1 B_2 A_3 \dots B_{n-1} B_n, \dots, A_1 B_2 B_3 \dots B_{n-1} B_n, B_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n, B_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} B_n, B_1 A_2 A_3 \dots B_{n-1} B_n, \dots, B_1 A_2 B_3 \dots B_{n-1} B_n, B_1 B_2 B_3 \dots B_{n-1} B_n$.)

Хипотеза. Нека в n -мерно пространство е дадена афинна координатна система. Нека точките $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n$ са върхове на (диагонална) точкова конфигурация с диагонали $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots, A_{n-1} B_{n-1}, A_n B_n$ и X е произволна точка. Тогава за детерминантите на елементарните точкови конфигурации:

$(X, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n), (X, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, B_n), (X, A_1, A_2, A_3, \dots, B_{n-1}, A_n),$
 $(X, A_1, A_2, A_3, \dots, B_{n-1}, B_n), \dots, (X, A_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, A_n), (X, A_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n),$
 $(X, B_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n), (X, B_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, B_n), (X, B_1, A_2, A_3, \dots, B_{n-1}, A_n),$
 $(X, B_1, A_2, A_3, \dots, B_{n-1}, B_n), \dots, (X, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, A_n), (X, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n)$
 и диагоналната конфигурация $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n B_1 B_2 B_3 \dots B_{n-1} B_n$, е в сила равен-

ството:

$$\begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ \dots \\ XA_{n-1} \\ XA_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ \dots \\ XA_{n-1} \\ XB_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ \dots \\ XB_{n-1} \\ XA_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XA_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ \dots \\ XB_{n-1} \\ XB_n \end{vmatrix} + \dots (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ \dots \\ XB_{n-1} \\ XA_n \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} XA_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ \dots \\ XB_{n-1} \\ XB_n \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ \dots \\ XA_{n-1} \\ XA_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ \dots \\ XA_{n-1} \\ XB_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ \dots \\ XB_{n-1} \\ XA_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XB_1 \\ XA_2 \\ XA_3 \\ \dots \\ XB_{n-1} \\ XB_n \end{vmatrix} + \dots (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ \dots \\ XB_{n-1} \\ XA_n \end{vmatrix} + (-1)^n \begin{vmatrix} XB_1 \\ XB_2 \\ XB_3 \\ \dots \\ XB_{n-1} \\ XB_n \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^n \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \\ A_3 B_3 \\ \dots \\ A_{n-1} B_{n-1} \\ A_n B_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \\ A_3 B_3 \\ \dots \\ A_{n-1} B_{n-1} \\ A_n B_n \end{vmatrix}.$$

Коментар. Равенството в теоремата се „конструира“, като се приложи „матричен“ принцип за построяване на вариациите от два елемента от n клас с повторение.

6. Вместо заключение

Както е известно, множеството от $n + 1$ точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ (елементарна точкова конфигурация) и определените от тях $\frac{(n+1)n(n+1)n}{2 \cdot 2}$ отсечки $A_1 A_2, A_1 A_3, \dots, A_n A_{n+1}$ наричаме **симплекс** в n -мерното пространство.

Нека детерминантата $\begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ A_1 A_3 \\ \dots \\ A_1 A_n \\ A_1 A_{n+1} \end{vmatrix}$ наречем „**ориентиран обем**“ на симплекса

$A_1 A_2 A_3 \dots A_n A_{n+1}$.

Тогава хипотезата може има следния геометричен смисъл.

Ако $A_1 A_2 A_3 \dots A_n B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ е диагонална точкова конфигурация с върхове: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ и диагонали $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots, A_n B_n$, то алгебричният сбор от ориентираните обеми на симплексите: $XA_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n$, $XA_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} B_n$, $\dots$, $XB_1 B_2 B_3 \dots A_n$, $XB_1 B_2 B_3 \dots B_n$ не зависи от точката X и е равен на ориентирания обем на симплекс, определен от векторите $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots, A_n B_n$ (по диагоналите на конфигурацията $A_1 A_2 A_3 \dots A_n B_1 B_2 B_3 \dots B_n$).

Извод. Хипотезата ни дава основание да кажем, че абсолютната стойност

на детерминантата $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \\ A_3 B_3 \\ \dots \\ A_n B_n \end{vmatrix}$ е **инварианта** на диагоналната точкова

конфигурация $A_1 A_2 A_3 \dots A_n B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ с диагонали $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots, A_n B_n$.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Vutova, I. (2014). *Heuristic and prognostic role of the theorems in the school curriculum in mathematics. Dissertation for the educational and research degree "doctor"* (In Bulgarian). Sofia. [Вутова, И. З. (2014). *Евристична и прогностична роля на теоремите в училищния курс по математика. Автореферат на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен доктор*. София.]
- Gavrilov, M. & I. Dimovski (1973). *Introduction to elementary algebra* (In Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Гаврилов, М. & И. Димовски (1973). *Въведение в елементарната алгебра*. София: Народна просвета.]
- Gjonov, A. & N. Stoev (1994). *Collection of problems in analytic geometry* (In Bulgarian). Sofia: SOFTEX. [Гъонов, А. & Н. Стоев (1994). *Сборник от задачи по аналитична геометрия*. София: СОФТЕХ.]
- Dochev, K. & D. Dimitrov (1973). *Linear algebra* (In Bulgarian). Sofia: Nauka I izkustvo. [Дочев, К. & Д. Димитров (1973). *Линейна алгебра*. София: Наука и изкуство.]
- Laltsef, Z. (1993). Anagwgh poluedrwn, *DIASTASH*, Trimhnia ia Maqhmatikh Epiqewrhsh twn PararthmatoV KentrikhV MakedoniaV thV E.M.E., TeucoV 3 – 4 /1993, Thessalonikh.
- Lalchev, Z. I. Vutova & M. Varbanova (2005). *Vector-algebraic method to solve geometric problems for areas and volumes* (In Bulgarian). Sofia: Veda Slovena-JG. [Лалчев, З. В., И. З. Вутова & М. Г. Върбанова (2005). *Векторно-алгебричен метод за решаване на геометрични задачи от лица и обеми*. София: Веда Словена-ЖГ.]
- Yaglom, I. M. & V. G. Ashkinuze (1962). *Ideas and methods of affine and projective geometry. Part I* (in Russian). Moscow: State Education-pedagogical Printing House of the Ministry of Education of the Russian Federation. [Яглом, И. М. & В. Г. Ашкинuze (1962). *Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, I часть*. Москва: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР.]

DIAGONAL CONFIGURATIONS OF POINTS. TRIANGLE RULE. INVARIANTS

Abstract. Some new concepts such as diagonal configuration of points and its invariants are introduced in the present work. It is shown that the quadrilateral and the octahedron are concretization of a diagonal configuration of points and

that the invariants of these configurations are analogues of the concepts of area of a quadrilateral and volume of an octahedron. The idea of invariants of diagonal configurations of points is consistently developed (an integrated approach is used) for 2-dimensional, 3-dimensional, 4-dimensional, n -dimensional ($n > 4$) space. Compact symbols are introduced in order to facilitate the general conclusions and to simplify the demonstrations, also the „triangle rule“ is deduced and consistently applied.

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**

Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1574 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Dr. Irina Voutova, Assist. Prof.**

Faculty of Mathematics and Informatics
University of Sofia
5, James Boucher Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: irinazv@abv.bg