ЧТО БОЛЬШЕ: π% от e или e% от π?

Николай Розов

Резюме. В статье рассматривается опыт изучения процентов в школе. Обосновывается, что главная трудность задач на проценты вовсе не в самих процентах, а в сложности точного и чёткого понимания практической ситуации, о которой идёт речь в задаче. Именно разъяснению содержания задачи и надо уделять основное внимание. Доказывается, что только в курсе экономических знаний есть реальная возможность связать проценты с актуальными для современной действительности новыми фундаментальными понятиями.

Keywords: education, percentage, practical problems

Пожилая учительница встречает на улице своего бывшего ученика.

– Володя, я рада тебя видеть. Как твои дела?

– Всё у меня отлично. Я бизнесом занимаюсь, торгую.

– Да как же ты торгуешь? Ты ведь в школе даже проценты усвоить не мог?

– А что там усваивать? Вот покупаю коробку американских сигарет за 17 долларов, а продаю – за 19. На эти два процента прекрасно живу.

0. Мне, к сожалению, не известно, какое место в программе математики болгарской школы занимает тема „Проценты“, как именно она излагается в болгарских учебниках и насколько трудной является для болгарских школьников. Однако, как ни странно, в российской школе „освоение процентов“ оказывается одним из самых трудных разделов математики. Преподаватели университетов с удивлением обнаруживают, что, сталкиваясь с процентами, студенты чувствуют себя весьма неуверенно. Горький смех вызывает та безграмотность, с которой иногда упоминаются проценты в передачах телевидения, в газетных публикациях. Поэтому полезно поговорить о том, что же на самом деле представляют собой „проценты“ и как следует знакомить с ними в школе.

Статья написана по „принципу слоёного пирога“. Материал, который имеет большую смысловую нагрузку или который можно использовать в учебной работе со школьниками, представлен крупным шрифтом. Более меньшим шрифтом даются методические рекомендации для учителя, пояснения, обсуждения и дополнительные сведения.

1. Зачем „проценты“ школьному курсу математики? Если смотреть с точки зрения „принципа научности“, то „процент“ не относится к числу открытий математики, в математической теории и в её приложениях он не играет никакой самостоятельной роли. Исторически появление процентов не имеет научно-математического основания, а связано, по-видимому, с психологическими мотивами (Grozdev, 2007), (Grozdev, 2011).

Наличие темы „Проценты“ в школьном курсе математики определяется не её научным значением, а традицией и прагматическими соображениями. Сложилось так, что проценты привычно употребляются при общении людей, в средствах массовой информации для того, чтобы количественно сравнивать между собой различные данные. Проценты традиционно используются как удобное средство для описания изменения (например, с течением времени) измеряемых величин в технике, экономике, финансовом деле, статистике, психологии, химии, биологии, медицине, фармакологии и др.

Казалось бы, именно в таком плане и следует говорить в школе о процентах: объяснить их смысл и продемонстрировать их использование. Однако вместо этого в школе предусмотрено подробное изучение процентов в отдельном, значительного объёма разделе. Из скромного технического способа представления результатов сравнения различных величин процент превратился в самостоятельный математический объект. „Изучению процентов“, решению „задач на проценты“ посвящено много методических статей и книжек, где наводится „теоретический лоск“, подробно излагаются разнообразные „тонкости“, тщательно классифицируются „типы задач на проценты“. Создается иллюзия, что раздел „Проценты“ и в самом деле является отдельной и серьезной главой математики.

Изучение „процентов“ в школе, действительно, вызывает большие затруднения. Но, на наш взгляд, они связаны вовсе не с математическими сложностями, а *с двумя методическими проблемами:* во-первых, *с обеспечением простого и точного понимания школьниками смысла процентов*, а во-вторых, *с преодолением психологических сложностей свободного и полного понимания учащимися формулировок „задач на проценты“* (Сергеева & Гроздев, 2012).

2. Как же школьникам обычно объясняют, что такое „процент“? К сожалению, в учебниках и методической литературе легко обнаруживаются неприемлемые для математики неопределённости, неточности и разночтения. Приведём лишь несколько распространённых „определений понятия процент“.

„Процент – одна сотая часть“. Вопрос: часть чего? Ведь „часть“ бывает только „у чего-то целостного“, а ни про какое „целостное“ в определении не говорится. Как согласуются между собой выражения „процент“, „один процент“ и „1%“? Какой точный смысл имеет сам по себе значок „%“?

„*Процент – сотая доля целого, принимаемого за единицу“.* Читая фразу „В выборах участвовало 62,7% избирателей“, школьник действительно должен считать, что общее число избирателей равно 1?

„1*% от A означает сотую долю некоторого числа A, обычно именованного … „*. „Доля именованного числа“ автоматически является числом именованным; поэтому „1% *от A*“ в каждом конкретном случае имеет отдельный „именованный“ смысл. Значит ли это, что существует много разных „процентов“? И почему запись „*p% от A“* надо понимать как произведение „1% от *A“* на число *p*?

Ещё одна цитата: „Для обозначения *одной сотой числа* употребляется слово *процент*: **$^1/_{100}$ – процент.** … При записи вместо слова *процент* используют значок %. Например, вместо слов *один процент* пишут: „1%“ … 1% – это $^1/_{100}$ от целого. Целое составляет $^{100}/_{100}$“. Может ли школьник понять такое объяснение?

А вот образец решения задачи „*Сколько процентов составляет* 120 *от* 250?”: „(120/250).100% = 0,48.100% = 48%“. Почему число 120 надо делить на 250? Как понимать умножение числа 120/250 на (число?) „100%“ и почему для нахождения этого „произведения“ число 0,48 надо умножить на число 100, а затем приписать к произведению символ „%“?

3. Прежде чем говорить о процентах, принципиально важно познакомить учеников с фундаментальными понятиями количественного сравнения объектов, величин, чисел, дать возможность освоить соответствующую стандартную терминологию и общепринятые обороты речи. Эти понятия имеют не только математический, но и глубокий общенаучный смысл, широко используются в практической деятельности. К сожалению, они в школьной программе отсутствуют. Поскольку обстоятельное рассмотрение темы „Сравнение величин“ требует много места, мы лишь кратко перечислим основные определения и факты. А для введения этой темы в школу нужно тщательно обсудить её содержание и изложить материал подробно, доступно, с примерами.

В своей деятельности людям очень часто приходится сравнивать между собой два различных объекта. Важно подчеркнуть, что объекты разумно сравнивать только по какому-то одному общему для них свойству (качеству). Процесс сравнения будет объективным, если для каждого из объектов это свойство *количественно измеримо* и, при заранее выбранной единице измерения, характеризуется *положительным числом*.

Из двух объектов, сравниваемых по указанному свойству, должен быть выделен (отмечен) тот, *с которым проводится сравнение.* Числовая характеристика (мера) его свойства принимается за базовое значение (как бы за „начало отсчёта“) и называется *эталоном*; обозначим это число ***M***. Числовая характеристика (мера) того же свойства другого объекта, *который сравнивается,* называется *вариантой*; обозначим это число ***m***. *Задача сравнения* состоит в том, чтобы каким-либо способом сравнить между собой меры рассматриваемого свойства двух объектов, то есть сравнить между собой два положительных числа – варианту ***m*** и эталон ***M***.

Существуют три вида сравнения.

а) Для *абсолютного сравнения варианты с эталоном* необходимо *из варианты вычесть эталон.* Результат $\Delta = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}$ такого сравнения, называемый *отклонением варианты от эталона,* является *именованным* числом. *Модуль* этого числа Δ (то есть число $|\Delta|$) называется *абсолютным отклонением Знак* „+*“* или „–“ числа Δ показывает, варианта ***m*** *больше* или *меньше* эталона ***M***.

б) Для *относительного сравнения варианты с эталоном* необходимо *варианту разделить на эталон.* Результат $\lambda = \boldsymbol{m} / \boldsymbol{M}$ такого сравнения, называемый *отношением варианты к эталону*, является *отвлечённым* числом и показывает, какую кратность или долю составляет варианта ***m*** от эталона ***M***. Это число λ − *положительное*; оно *больше* (*меньше*) единицы, если варианта ***m*** *больше* (*меньше*) эталона ***M***.

в) Для *относительного сравнения отклонения с эталоном* необходимо *отклонение разделить на эталон.* Результат $\varepsilon = (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}) / \boldsymbol{M}$ такого сравнения, называемый *относительным отклонением варианты от эталона,* является *отвлечённым* числом. *Модуль* этого числа ε показывает, какую кратность или долю составляет абсолютное отклонение $|\Delta|$ от эталона ***M***; *знак* „+*“* или „–“ числа ε показывает, варианта ***m*** *больше* или *меньше* эталона ***M***.

Термин „эталон“ (от фр. „étalon“ – „эталон“) хорошо знаком и означает, в частности, „образец для сравнения“. Менее известен термин „варианта“ (от лат. „varians“ – „изменяющийся“), который надо понимать как „изменившаяся величина“, „величина, отличная от эталона“. Мотивом для введения этого термина может служить то, что в жизни, на практике типична следующая ситуация: с одним и тем же единым, фиксированным эталоном сравнивается не одна, а много различных величин, каждая из которых имеет своё отклонение от эталона.

4. Далее имеет смысл кратко затронуть (важный и сам по себе) вопрос о различных представлениях (изображениях) чисел, что имеет прямое отношение к дальнейшему.

Основным и общепринятым является десятичный позиционный способ представления чисел. Однако он оказывается мало удобным, когда в приложениях (при измерениях или при вычислениях) появляются „слишком длинные“ или „слишком громоздкие“ числа. Психологически человек к числу 29375640173,7492804513385 испытывает антипатию – ни прочитать, ни воспринять, ни тем более запомнить его фактически невозможно (Grozdev, 2007). Так как на практике обычно важна не „идеальная точность“, а „удобное приближение“, то имеют значение лишь „величина разрядности“ числа и его одна или две (реже три) первые значащие цифры – именно эти характеристики числа и выделяют. Например, вместо указанного выше числа используют его приближение в форме $29 \cdot 10^9$. В случае именованных чисел этой же цели служат шкалы единиц измерения: так, вместо 0,00000005371902 *км* пишут 0,05 *мм*.

Напомним и известный факт: одно и то же число может записываться с помощью различных обозначений (и в разных ситуациях используется то из них, которое удобнее). Так, число „восемь“ изображается символами: 8; VIII; ח; 八; 8,000; 8/1; 7,(9); $(1/8)^{-1}$; $\log_2 256$ и т. д. При работе в 16-ричeной системе счисления привлекаются обозначения для „дополнительных“ цифр (помимо обычных десяти), например: A=10, B=11, … , F=15. Для некоторых иррациональных чисел принято использовать специально придуманный значок: $\sqrt{17}$. За отдельными „выдающимися“ числами закреплены буквы: $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\varphi}$ (число Фибоначчи) (Grozdev, 20017) и др.

5. Перед тем, как непосредственно перейти к процентам, рассмотрим конкретный пример жизненной ситуации: *из 864 избирателей за Иванова проголосовали 327 человек.* Как по возможности кратко и доходчиво охарактеризовать „степень“ успеха Иванова, то, как „далеко“ он оказался от „полной победы“?

Ясно, что речь здесь идёт о сравнении числа избирателей, отдавших свои голоса Иванову, с общим числом избирателей; поэтому число 864 является эталоном, а число 327 служит вариантой. Конечно, „способы сравнения“ этих чисел существуют разные. Можно, скажем, *из варианты вычесть эталон* и назвать разность *результатом сравнения*. Такой способ сравнения применяется на практике довольно часто, но в данном случае получающееся число „– 537“ не позволяет составить ясное представление о степени успеха Иванова. А можно *разделить варианту на эталон* и назвать *результатом сравнения* частное. Этот способ сравнения явно нагляднее: чем варианта (число голосов „за“ Иванова) ближе к эталону (числу всех голосов), то есть чем результат сравнения ближе к 1, тем удачнее выборы для Иванова.

Именно этот способ сравнения мы и выберем – и скажем, что „Доля голосов, которую получил Иванов, составляет $^{327}/_{864}$ от общего числа голосов“. Этот ответ абсолютно точен, но уж очень он громоздок и тяжело воспринимается! Можно, конечно, обыкновенную дробь $^{327}/_{864}$ сократить и заменить на $^{109}/_{288}$ или записать в виде (бесконечной) десятичной дроби: $^{327}/_{864}$ = 0,3784722..., однако и эти записи результата сравнения сложно запомнить и трудно наглядно себе представить.

Есть ещё одно предложение: вместо бесконечной десятичной дроби брать её конечные приближения – тем более, что её „далёкие“ десятичные знаки никакого реального смысла не имеют. Например, если (при фиксированном общем числе 864 избирателя) взять два приближения 0,37847 и 0,3784, то они различаются „на 0,06 отданных голосов“. Поэтому разумно ещё более упростить форму ответа и сказать, что Иванов набрал „без малого“ 0,38 от числа всех голосов. Или, иначе, что за него проголосовала почти $^{38}/_{100}$ всех избирателей.

Эти две последние дроби допускают довольно прозрачную интерпретацию: они означают, что за Иванова проголосовало „в среднем почти 38 человек из каждой сотни избирателей“. Коротко и легко запоминается!

6. Этот и другие реальные примеры позволяют сделать вывод, что представление результата сравнения в форме „*сколько-то на сотню*“ оказывается чрезвычайно практичным и привлекательным. Поэтому понятно естественное стремление к стандартизации такой формы, заключающейся в стилизации части дроби „ $/_{100}$“ в виде специального символа „%“. Именно, общепринятым является следующее

ОБОЗНАЧЕНИЕ. *Число* $\mathbf{^{1}/_{100} = 0,01}$ *обозначается еще и значком* **%**, *который называется „**процент**”*:

$$\% = {}^{1}/_{100} = 0{,}01. \tag{1}$$

Если p – действительное число, то выражение p% (читается: „пэ процентов“) представляет собой произведение чисел p и %:

$$p\% = p \cdot \% = p \cdot 0{,}01 = p \cdot {}^{1}/_{100} = p/100 = p \cdot 10^{-2}. \tag{2}$$

Такое обозначение позволяет дать самую удобную формулировку результату голосования: „Иванов собрал почти 38% голосов“.

Слово „процент“ (*ударение делается на „е“*) – происходит от латинского „pro centum“ − „на сотню“.

Следует помнить, что слово „процент“ имеет и другое смысловое значение − выражает тот факт, что заёмщик (помимо возврата предоставленных ему кредитором денежных средств) должен дополнительно заплатить кредитору за использование полученных от него средств. Об этом говорит, например, объявление: „Банк предоставляет населению кредиты под проценты“.

Надо иметь в виду, что на Западе широкое распространение получила манера записывать, например, дробь 0,35 в форме „.35“, опуская „ноль целых“ (и *используя для отделения дробной части точку*, а не запятую). При этом часто вместо 1% используется обозначение „.01“.

Таким образом, в связи с „проблемой процентов“, необходимо отметить два принципиальных момента.

1). „Процент“ – это *не понятие*, его не надо определять. Процент „%“ – *удобное, традиционно используемое обозначение* для конкретного числа $^1/_{100}$, это и надо просто и формально объяснить. В этом смысле „%“ ничем не отличается от других употребляемых в математике символов для обозначения чисел.

2). „Математика процентов“ тривиальна (мы остановимся на этом ниже), трудности в решении „задач на проценты“ носят не математический, а, скорее, языковой характер.

7. К введённому обозначению (1) надо, конечно, привыкнуть, осознать, что в употреблении для числа $^1/_{100} = 0{,}01 = 10^{-2}$ ещё и нового значка % нет ничего неожиданного. В самом деле, в записи (1) можно видеть аналогию со столь привычной записью $\pi \approx 3{,}14 \approx {}^{22}/_7$. А выражение p% в (2) логично понимать как произведение двух чисел p и % с опущенным по традициям алгебры знаком умножения (точки „**·**“).

В частности, $1\% = 1 \cdot {}^1/_{100} = {}^1/_{100} = 0{,}01$ – и мы получаем еще одну новую форму записи дроби 0,01. Так как $100\% = 100 \cdot {}^1/_{100} = 1$, то, значит, в виде 100% можно записывать число 1. Справедлив следующий общий факт: *любое число а можно записать в виде*

$$a = 100 \cdot a \cdot {}^1/_{100} = (100a)\%. \tag{3}$$

Если число a представлено с помощью символа % в виде $(100a)$%, то говорят, что *число а выражено в процентах.*

Опыт показывает, что школьники легко принимают обозначение % и спокойно его используют. Скептицизм в отношении трактовки символа % как числа возникает обычно (и довольно часто!) у учителей в связи с вопросом: „Если % - число, то как с этим числом проводить операции?“. Ответ: точно так же, как они выполняются, например, с числом π − с той лишь (весьма удобной нам) разницей, что в любой момент можно вместо числа „%“ подставить его точное „численное“ значение $^1/_{100}$. Ничто не мешает понимать запись a + % как сложение $a + 0{,}01$, запись $(\%)^2$ как произведение %% и т. д. и проводить, скажем, такие вычисления:

$$42\% + \% - 28\% \cdot 0{,}5(\%)^2 - 7 \cdot 13\% / 61\% = 43 \cdot \% - 28 \cdot 0{,}5 \cdot (\%)^3 - (7 \cdot 13/61) \cdot (\% / \%) =$$
$$= 43 \cdot 0{,}01 - 28 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}01^3 - 7 \cdot 13/61 = \ldots$$

Но почему же это никогда и нигде не делается? Дело в том, что использование символа % в арифметических вычислениях и алгебраических преобразованиях не даёт никакого удобства, никаких преимуществ. Поэтому *в арифметике и алгебре в символе % нет никакой необходимости, и он там не используется и не встречается.*

8. *Проценты традиционно используются* ***исключительно*** *как средство записи результата сравнения положительных величин –* ***и больше нигде****.* В этом и только в этом состоит единственное разумное предназначение процентов. Необходимо запомнить: если *в результате сравнения двух величин* установлено, что первая составляет 0,38 второй, то мы можем выразить этот факт словами „Первая величина составляет 38% от второй“. Однако если *в какой-либо иной ситуации* (в обиходе, в арифметической задаче, при расчётах и т. д.) мы встречаем дробь 0,38, то её ни в коем случае *нельзя* читать „38 процентов“!

Конечно, из (3) видно, что любое число формально можно „выразить в процентах“. Но использовать такое „процентное представление чисел“ вне сферы сравнения величин так же противоестественно, как попросить в магазине „продать 2500 карат сметаны“.

Таким образом, основная функция процентов – не вычислительная. В современном своем употреблении, взятый сам по себе, „процент“ не позволяют ничего подсчитывать, преобразовывать, определять, не является „частью чего-либо“. Символ „%“ является лишь вспомогательным обозначением числа $^1/_{100}$ и используется просто как одна из технических, но удобных, распространённых форм *представления данных.*

В силу каких же причин привычка использовать проценты для сообщения результата сравнения величин оказалась такой популярной и живучей? Видимо, все дело в интуитивном, подспудном нежелании людей лишний раз использовать дроби, в их стремлении чаще работать с целыми (и по возможности – „короткими“) числами. (Кстати, с этой же целью были введены и многие профессиональные „неметрические“ единицы измерения, например, „карат“.)

Как правило, в выражении p% число p стараются сделать целым (то есть результат сравнения округляется до целого числа процентов), и притом желательно, чтобы оно было не более чем трехзначным. При особой необходимости, конечно, могут добавляться и десятые, и сотые доли процента, например: 135,2% или 0,08%. Однако следует понимать: чем больше десятичных знаков пишется, тем меньше смысла выражать результат сравнения „в процентной форме“, ибо её удобство как раз и заключается в использовании не слишком „длинных“ чисел.

9. Алгоритм **„**математики процентов“ чрезвычайно прост, он состоит только *в преобразовании формы представления отношения*. Пусть, например, нас интересует возникающее в некоторой прикладной задаче относительное сравнение варианты $\boldsymbol{m} > 0$ с эталоном $\boldsymbol{M} > 0$. Результатом такого сравнения является числовое отношение $^{m}/_{M}$ этих двух чисел. Совершенно ясно, что всегда можно построить специального вида пропорцию $^{m}/_{M} = {}^{p}/_{100}$ и тем самым записать нужное нам числовое отношение $^{m}/_{M}$ в виде равной ему дроби $^{p}/_{100}$. Если при этом число p оказывается „удобным“, то есть смысл использовать проценты и выразить результат сравнения варианты $\boldsymbol{m}$ с эталоном $\boldsymbol{M}$ в форме „*p*%“. (Совершенно аналогично обстоит дело в случае, когда речь идёт об относительном сравнении отклонения с эталоном.)

Думающий ученик при знакомстве с процентами может задать нетривиальный вопрос: почему выделяется именно сравнение „столько-то на сотню“, то есть пропорция $^m/_M = {}^p/_{100}$, и почему именно для числа $^1/_{100}$ „прижилось“ специальное обозначение „%“? Ответы на эти вопросы не следует искать в математике, поскольку они лежат за её пределами и состоят в использовании для каждого конкретного случая наиболее удобной формы представления данных.

Люди далеко не всегда используют обязательно сравнение „столько-то на сотню“. Вспомните фразы: „из трёх бросков два оказываются удачными“, „каждый двадцатый встречный идёт в пальто“, „телефон звонит почти ежеминутно“ и т. д., которые мы употребляем довольно часто. А ведь это и есть „другие“ формы выражения результатов сравнения величин! Например, если говорят про „восемь попаданий из каждых десяти выстрелов“, то имеют в виду, что результат сравнения варианты (число попаданий) с эталоном (число всех выстрелов) приблизительно равен $^8/_{10} = 0{,}8$. Здесь, однако, важно ясно понимать „усреднённый“ смысл такого результата сравнения: он *не означает*, что из *любых* 10 выстрелов цель *обязательно* будет поражена 8 раз.

Однако, например, для дроби $^1/_{10}$ специального обозначения не возникло – не сложилось. Наверно, потому, что сравнение ”столько-то на десятку“ не даёт возможности обеспечивать достаточную точность результата сравнения величин, используя „удобные“ (“короткие“) числа. Но заметим, что и дробь $^1/_{100}$ не является единственной, которая имеет свой персональный символ. Достаточно широко употребляется (например, в химии, биологии, медицине, фармакологии) *специальное обозначение для числа* $^1/_{1000}$ *– значок* „‰“, так что ‰ = $^1/_{1000}$. Этот значок называется „промилле“ (с ударением на „и“), а слово происходит от лат. „pro mille“ – „на тысячу“.

10. В каких же задачах и как именно используются проценты? Отметим сразу, что принятое выше обозначение (1) и представление (2) позволяют сделать заключение, что, собственно, *„задач на проценты“ как таковых вообще не существует.* Любую задачу, где фигурируют проценты, можно немедленно и без всякого труда переформулировать в виде „обычной“ арифметической задачи (заменив значок % на число 0,01), и после этого оперировать только с целыми и дробными числами.

Возьмём для примера типичную задачу из числа тех, которые обычно предлагают для проверки „знания процентов“. *Билет на автобус стоит 15 руб. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 руб. после повышения цены билета на 20%*? Однако всё необходимое „знание процентов“ здесь сводится к тому, что

20% = $^1/_5$. Возможные же трудности в решении этой задачи − чисто „языковые”: надо правильно понять выражение „после повышения цены билета“, то есть понять, что

„новая цена“ = „старая цена + $^1/_5$ от старой цены“.

Типов задач, в которых возникают „проценты“, ***всего два***.

I. Первая задача характеризуется вопросом: „*Во сколько раз варианта **m** отличается от эталона **M***?“. Ясно, что для ответа необходимо найти частое от деления варианты на эталон. Эта задача называется *относительным сравнением варианты с эталоном*; получающийся результат – число

$$\lambda = \boldsymbol{m} / \boldsymbol{M} \tag{4}$$

− называется *отношением* варианты ***m*** к эталону ***M***. Число λ – *положительное*; если λ больше единицы, то варианта больше эталона в λ раз, а если λ меньше единицы, то варианта меньше эталона в $^1/_\lambda$ раз (или, что то же самое, эталон больше варианты в λ раз).

Можно сказать, что варианта как бы „измеряется“ в „эталонах“, а число λ показывает, „сколько раз“ эталон „укладывается“ в ней. Здесь уместна аналогия с тем, как мы измеряем длину отрезка, последовательно откладывая на нём „эталон метра“ (или его доли).

Результат относительного сравнения варианты с эталоном часто принято „выражать в процентах“. Для этого необходимо, согласно (3), представить λ = (100λ)% и, введя для краткости новое число

$$p = 100\lambda, \tag{5}$$

переписать (4) в другой, эквивалентной форме – с помощью символа %:

$$\boldsymbol{m} / \boldsymbol{M} = p\%. \tag{6}$$

(*Выражение p*% − произведение чисел *p* и $^1/_{100}$ – не надо путать с *числом p.*) В таком случае говорят, что *варианта **m** составляет p% от эталона **M***. Неравенство $p\% > 100\%$ означает, что варианта больше эталона, а неравенство $p\% < 100\%$ – что варианта меньше эталона.

Следовательно, *чтобы ответить на вопрос, сколько процентов составляет варианта **m** от эталона **M*** (см. (6)), *нужно частное λ от деления **m** на **M*** (см. (4)) *умножить на* 100 (см. (5)) *и затем поставить значок* %:

$$p\% = (\lambda\cdot 100)\% .$$

Более употребительной является иная запись формулы (6):

$$\boldsymbol{m} = p\%\boldsymbol{M}. \tag{7}$$

которая служит математической формой записи фразы „*варианта **m** составляет p% от эталона **M***“. (Напомним, что в правой части равенства (7) стоит произведение трёх чисел.) Она позволяет находить любую из величин $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{M}$, $p\%$, если известны две другие.

На практике, в самых разнообразных реальных ситуациях, такого рода задачи встречаются очень часто – при анализе динамики повышения (понижения) цен, при определении размера прибыли, при оценке производительности труда, при описании состава вещества, при сравнении различных статистических данных и т.д.

Рассмотрим, к примеру, такую задачу: „*На склад привезли* 100 *кг ягоды; экспресс-анализ показал, что эта партия ягоды содержит* 99% *воды. Через какое-то время экспресс-анализ был проведен снова и показал, что содержание воды составило* 98%. *Какой в этот момент была масса партии ягоды*?“.

Любая ягода состоит из двух компонент: из воды и из „твёрдого вещества“, которое, собственно, и характеризует вид ягоды (клубника, смородина, крыжовник и т. д.). Конечно, воды в ягоде обычно много – в нашем случае „содержание воды в 99%“ означает, что в 100 *кг* привезенной ягоды воды было 99 *кг*, а „твёрдое вещество“ по массе составляло только 1 *кг.* С течением времени почти с любым продуктом происходит „усушка“ и его масса уменьшается за счёт того, что вода постепенно испаряется и продукт теряет воду. Но „твёрдое вещество“ никуда не исчезает, его масса сохраняется. При втором анализе выяснилось, что в ягоде теперь уже содержится 98% воды от общей массы имевшейся на тот момент ягоды. Это значит, что 2% от общей массы ягоды приходится на „твёрдое вещество“, которого по-прежнему 1 *кг*. Следовательно, в момент второго анализа партия ягоды имела массу 50 *кг*.

Опыт изучения „процентов“ в школе показывает, что главная трудность „задач на проценты“ вовсе не в самих „процентах“, а в сложности точного и чёткого понимания практической ситуации, о которой идёт речь в задаче. Именно разъяснению содержания задачи и надо уделять основное внимание.

Отношение варианты *m* к эталону *M*:

$$\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{(100\lambda)\%} \equiv \boldsymbol{p}\% \text{ или } \boldsymbol{m} = \boldsymbol{p}\%\,\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{p\,M}}{\mathbf{100}}$$

Число λ и произведение $p\%$ являются двумя различными, но эквивалентными формами записи одного и того же результата „измерения“ варианты $\boldsymbol{m}$ эталоном $\boldsymbol{M}$. А каков же смысл самого *числа* p? Ничто не мешает нам ту же самую варианту $\boldsymbol{m}$ „измерять“ с помощью другого эталона, например, $^1/_{100}\boldsymbol{M}$. (Ведь можно же измерять метром, а можно – и сантиметром.) Так как „единица измерения“ уменьшилась в 100 раз, то результат нового „измерения“ увеличится в 100 раз и окажется равным $100\lambda = p$ (см. (5)), так что сотая доля эталона $\boldsymbol{M}$ в варианте $\boldsymbol{m}$ „укладывается“ p раз. Следовательно, *число p является отношением варианты $\boldsymbol{m}$ к сотой доле эталона $\boldsymbol{M}$.*

II. Вторая задача несколько сложнее. Для её формулировки сначала введём величину $\Delta = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}$ (обратите внимание: *из варианты вычитается эталон*), называемую *отклонением варианты $\boldsymbol{m}$ от эталона $\boldsymbol{M}$*. Она является *именованным* числом (выражается через принятую единицу измерения), причём *знак* „+“ или „–“ числа Δ показывает, варианта $\boldsymbol{m}$ *больше* или *меньше* эталона $\boldsymbol{M}$.

Теперь зададимся вопросом: „*Во сколько раз отклонение Δ варианты $\boldsymbol{m}$ от эталона $\boldsymbol{M}$ отличается от эталона $\boldsymbol{M}$?*“. Ясно, что для ответа необходимо найти частное от деления отклонения на эталон. Эта задача называется *относительным сравнением отклонения* (*варианты от эталона*) *с эталоном*; получающийся результат − число

$$\varepsilon = (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}) / \boldsymbol{M} = \Delta / \boldsymbol{M} \tag{8}$$

− называется *относительным отклонением варианты $\boldsymbol{m}$ от эталона $\boldsymbol{M}$*. Число ε может быть как положительным, так и отрицательным: его *знак* „+“ или „–“ показывает, варианта $\boldsymbol{m}$ *больше* или *меньше* эталона $\boldsymbol{M}$.

Для того чтобы выяснить смысл *модуля* числа ε, заметим, что $|\varepsilon| = |\Delta| / \boldsymbol{M}$. Поэтому если $|\varepsilon| > 1$, то абсолютная величина отклонения варианты $\boldsymbol{m}$ от эталона $\boldsymbol{M}$ (то есть число $|\Delta|$) больше эталона $\boldsymbol{M}$ в $|\varepsilon|$ раз, а если $|\varepsilon| < 1$, то эталон $\boldsymbol{M}$ больше числа $|\Delta|$ в $|\varepsilon|$ раз (ср. со случаем (4)).

Результат относительного сравнения отклонения с эталоном часто принято „выражать в процентах“. Для этого необходимо, согласно (3), представить $\varepsilon = (100\varepsilon)\%$ и, введя для краткости новое число

$$q = 100\varepsilon \tag{9}$$

(оно имеет тот же знак, что и число ε), переписать (8) в другой, эквивалентной форме – с помощью символа %:

$$(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}) / \boldsymbol{M} = q\%. \tag{10}$$

(*Выражение* $q\%$ − произведение чисел q и $^1/_{100}$ – не надо путать с *числом* q.) В таком случае говорят, что *отклонение варианты* $\boldsymbol{m}$ *от эталона* $\boldsymbol{M}$ *составляет* $q\%$ *от эталона* $\boldsymbol{M}$.

Следовательно, *чтобы ответить на вопрос, сколько процентов от эталона* $\boldsymbol{M}$ *составляет разность между вариантой* $\boldsymbol{m}$ *и эталоном* $\boldsymbol{M}$ (см. (10)), *нужно частное* ε *от деления* $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}$ *на* $\boldsymbol{M}$ (см. (8)) *умножить на* 100 (см. (8)) *и затем поставить значок* %:

$$q\% = (\varepsilon \cdot 100)\% \,.$$

Более употребительной является иная запись формулы (10):

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M} + q\%\boldsymbol{M}, \tag{11}$$

которая служит математической формой записи фразы „*варианта* $\boldsymbol{m}$ *отличается от эталона* $\boldsymbol{M}$ *на* $q\%$ *от эталона* $\boldsymbol{M}$“. (Напомним, что в правой части равенства (11) стоит произведение $q\%\boldsymbol{M}$ трёх чисел.) Она позволяет находить любую из величин $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{M}$, $q\%$, если известны две другие. Неравенство $q\% > 0$ соответствует случаю „варианта больше эталона“, а $q\% < 0$ – случаю „варианта меньше эталона“. Однако обычно предпочитают использовать „проценты без знака”: при $q\% < 0$ принято вместо „варианта отличается от эталона на $q\%$“ говорить „варианта *меньше* эталона на $|q|\%$ (от эталона)“, а при $q\% > 0$ говорят „варианта *больше* эталона на $q\%$ (от эталона)“.

На практике такого рода задачи встречаются очень часто. Например, в финансовом деле говорят о „*вкладе в банк под* $r\%$ *годовых*“.

Это означает следующее. Если вкладчик положит в банк сумму в $\boldsymbol{M}$ рублей, то через год банк возвратит ему сумму в $\boldsymbol{m}$ рублей (причём $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{M}$, поскольку банк должен заплатить вкладчику за использование его денег), и вкладчик получит доход, равный $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}$ рублей. Правила банка таковы, что доход вкладчика прямо пропорционален (с определённым, установленным в каждом банке коэффициентом пропорциональности ε) сумме, вложенной им в банк в начале года, то есть $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{M} = \varepsilon\boldsymbol{M}$. Переписав (ср. с (9) – (11)) это соотношение в форме $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}(1 + r\%)$, получим величину $r\%$, которая называется *годовым банковским процентом* данного банка. А доход вкладчика от вложения на год в этот банк суммы в $\boldsymbol{M}$ рублей будет равен $r\%\boldsymbol{M}$ рублей.

При желании можно продолжить эту тему и познакомить учеников с понятием „сложных процентов“.

Относительное отклонение варианты m от эталона M:

$$\frac{m - M}{M} = \varepsilon = (100\varepsilon)\% \equiv q\% \text{ или } m = M\,(1 + q\%) = M\left(1 + \frac{q}{100}\right)$$

Формулами (7) и (11) фактически исчерпывается весь багаж *математических* знаний „о процентах", который необходим школьнику. Эти формулы полезно на плакатах повесить в классе при изучении темы „Проценты" и дать возможность ученикам свободно ими пользоваться. И не надо требовать „зазубривать" эти формулы − они постепенно будут усвоены сами собой с помощью этих плакатов.

11. Самое сложное и самое важное в каждой конкретной „задаче на проценты" – вовсе не рутинные арифметические действия, а умение выяснить, точно понять, *какая из участвующих в условии задачи величин является эталоном, а какая – вариантой.* И именно этому в первую очередь необходимо терпеливо и настойчиво обучать школьников. Например, они должны понимать бессмысленность вопросов типа „На сколько процентов различаются между собой числа 17 и 19?".

К сожалению, нередко встречаются задачи, которые плохо сформулированы и потому оказывается непонятна суть дела. Вот пример такой задачи: „В 1992 г. производство упало на 19%, в 1993 г. – в 1,5 раза. На сколько процентов упало производство к концу 1993 г.?". Как понимать сказанное? Имеется ли в виду, что падение в 1992 г. произошло на 19% от неназванного начального уровня отсчета, а за 1993 г. производство снизилось в 1,5 раза от уровня конца 1992 г.? Ведь допустимо и иное толкование: в 1992 г. производство упало на 19% от (неназванного) эталона, а в 1993 г. – в 1,5 раза *от того же* эталона.

Хорошо известно, что в языке (особенно в разговоре) допустима „вольность речи", когда пропускаются отдельные слова, легко восстанавливаемые по понятной внутренней логике сказанного. Этот феномен типичен и для многих „фраз о процентах", и для формулировок многих „задач на проценты" – и именно он является основным камнем преткновения для значительной части учащихся. Дело в том, что *к лексической специфике текстов „задач на проценты", к логическому анализу их формулировок учащиеся в своей массе ещё не готовы.* Они не знают многих терминов и языковых оборотов, не готовы воспринимать подтекст, не в состоянии восстанавливать недосказанности „взрослой речи", которую почему-то часто считают возможным использовать учителя и авторы учебников, не владеют в достаточной мере тонкостями стилей письменного языка (прежде всего – формально-бюрократического, характерного для задач на проценты).

Поэтому учителю математики следует проводить с учениками тщательный лингвистический анализ содержания задачи. Действительно, всякий ли ученик ясно понимает разницу между выражениями „цена упала на 32%" и „цена упала до 68%"? Надо помогать ученикам по смыслу, по контексту разбираться в „фигуре умолчания“, если она содержится в формулировке. Это особо важно, когда в задаче встречаются „недосказанные“ фразы типа „Цена упала на 27%“, „Скидки до 30%“, „Индекс продаж достиг 91%“, „Уровень безработицы приближается к 15%“ и т. д. Отдельный разговор – о понимании смысла информации, „нагруженной“ профессиональным жаргоном экономистов, например: „Курс акций просел на 3 пункта“.

И ещё одна важная проблема, которую следует решать при изучении процентов. Школьникам надо прочно усвоить, что *при сравнении объектов имеет смысл говорить лишь о тех их качествах, которые могут быть объективно выражены реальными числовыми характеристиками.* Только в этом случае имеет смысл использование процентов для выражения результата сравнения. Здесь математика должна помочь молодёжи обезопасить себя от агрессивной рекламы, которая подчас действует на психику своей „красивой научностью“, а на самом деле рассчитана на „простаков“. Мы имеем в виду прежде всего многочисленную бессмысленную информацию вроде „Шампунь *NN* обеспечивает до 146% блеска волос“, „Использование нашей щёточки для ресниц на 72% увеличит выразительность Вашего взгляда“, „Эта паста удаляет до 87% пятен на зубах“ и т. д.

В результате изучения темы „Проценты“ в средних классах школьники получают лишь примитивные и поверхностные знания, имеют место расточительная трата учебного времени и малопроизводительная работа учителей. По нашему мнению, *полноценного освоения темы „Проценты“ в средних классах добиться невозможно в силу объективных положений возрастной психологии и уровня общей подготовки учеников.* И если мы хотим сделать эту тему действительно доступной и практически полезной – *её изучение целесообразно перенести в старшие классы.*

Ещё более удачным вариантом было бы перемещение знакомства с процентами в курс экономических знаний. Не надо сходу отклонять обсуждение этого предложения. Позаимствовал же курс информатики понятие „алгоритм“, которое возникло и изучалось математиками ещё до рождения самого слова „информатика“. И от этого курс информатики стал только богаче и интереснее. Только в курсе экономических знаний (Гроздев, 2011) есть реальная возможность связать проценты с актуальными для современной действительности новыми фундаментальными понятиями, показать школьникам использование процентов в серьёзных, затрагивающих всех вопросах, имеющих важное жизнеобеспечивающее значение для людей (экономическая статистика, начисление налогов, накопление вкладов, финансовые пирамиды и др.). Кстати, именно финансовая математика – единственная область, где проценты используются не для представления данных, а для каких-то содержательных вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.
2. Grozdev, S. (2011). System for Identification and Support of Students with Higher Ability in Mathematics. *Сб. материалов Международной научно-практической конференци „Современные подходы к проблеме одарености"*, Астана, 15-16 августа 2011. Астата: Дарын.
3. Сергеева, Т. & Гроздев, С. (2012). Субектность как методологический принцип информатизации образования. *Математика и информатика*, 55, 3, 201–206.
4. Гроздев, С. (2011). Математическо моделиране в икономиката. *Годишник на ВУЗФ*, 7, 2011, София: „Св. Г. Богослов", 73–114 (ISSN 1312-7918).

WHAT IS GREATER: π% from e or e% from π?

Abstract. The paper considers the experience in the perception of percentages by students. It is grounded that the main difficulty in solving problems with percentages is not at all in the percentages themselves but in the complexity of a clear and exact understanding of the practical situation that is modelled by a respective problem. Thus, special attention should be paid to the clarification of the problem content. It is proved that a real possibility to connect percentages with actual fundamental notions of the contemporary reality could be found in Economics course knowledge.

Nickolay Rozov
✉ Professor, DSc in Mathematics
Corresponding Member of the Russian Academy of Education
Dean of the Pedagogical Faculty
Moscow State University „V. Lomonosov"
E-mail: fpo.mgu@mail.ru