Educational Matters
Научно-методически статии

ЦИКЛОИДА

Аяпбергенов Азамат, Бокаева Молдир,
Чурымбаев Бекнур, Калдыбек Жансуйген
Областная специализированная школа-интернат для одаренных детей с углубленным изучением различных предметов – Актау (Казахстан)

Аннотация. В данной статье представлены результаты работы подкоманды Казахстана – части международной команды учащихся. Она была создана для реализации сетевого исследовательского проекта «Энциклопедия замечательных плоских кривых: пишем сами». При выполнении заданий ученики проводили компьютерные исследования с помощью программных продуктов GeoGebra, Geometer's Sketchpad и Maple. Для доказательства полученных гипотез использовался метод координат. Сетевое взаимодействие участников проекта проводилось в облачном сервисе Google.

Ключевые слова: круг; кривая; траектория; циклоида

«Энциклопедия замечательных плоских кривых: пишем сами» – это международный сетевой краутсорсинг – проект, который был предложен российскими учеными: доцентом Г. А. Клековкиным и профессорами А. В. Ястребовым и В. Р. Майером в 2017 году. Идея проекта состояла в подготовке силами учащихся разных стран материалов для электронной энциклопедии. Для организации работы был создан сайт «Пишем сами». Отправной точкой послужили статьи-матрицы, подготовленный руководителями проекта. Статьи-матрицы – это серии информационных и исследовательских задач, в результате решения которых должны быть найдены и систематизированы ранее известные в науке и получены новые результаты о какой-либо из замечательных кривых. В конце сентября 2018 года мы приступили к работе над задачами статьи – матрицы «Циклоида», подготовленной профессором А. В. Ястребовым.

Основные результаты нашей работы.

1. Циклоида-плоская трансцендентная кривая. Циклоида определяется как траектория фиксированной точки производящей окружности, которая катится без скольжения по прямой (рис. 1). Название образовано от греческих слов $\kappa\upsilon\kappa\lambda o\varsigma$ (круг, окружность) и $\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ (произхождение) – буквальный смысл „порожденная кругом". Название ей дал – Галилей, которы первый изучал свойства этой кривой. В 1696 г. Иоганн Бернулли поставил задачу о кривой быстрейшего спуска – брахистохроне. Якоб Бернулли, Лейбниц, Лопиталь и Ньютон решили эту задачу и доказали, что такой кривой является циклоида.

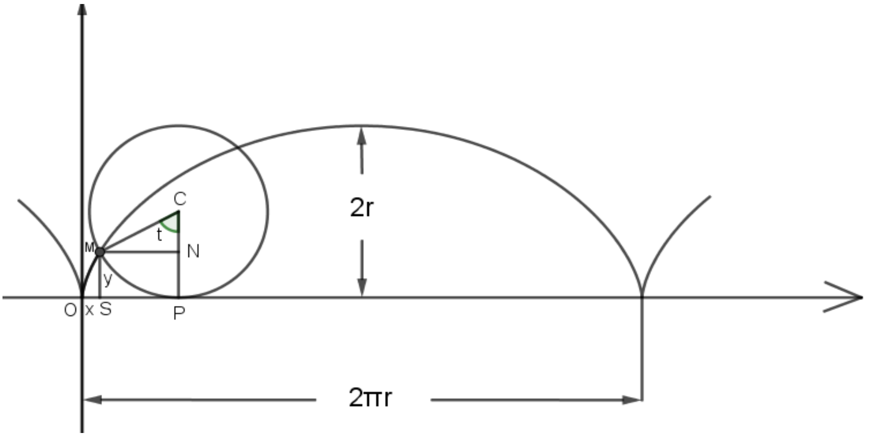

Рис. 1

2. Циклоида и родственные циклоиды. Обобщением циклоиды является трохоида – траектория точки, связанной с кругом, катящимся по прямой, но находящейся на произвольном расстоянии d от его центра. Если $d < r$, то кривая называется *укороченной циклоидой*. Каждая ветвь ее имеет две точки перегиба (рис. 2).

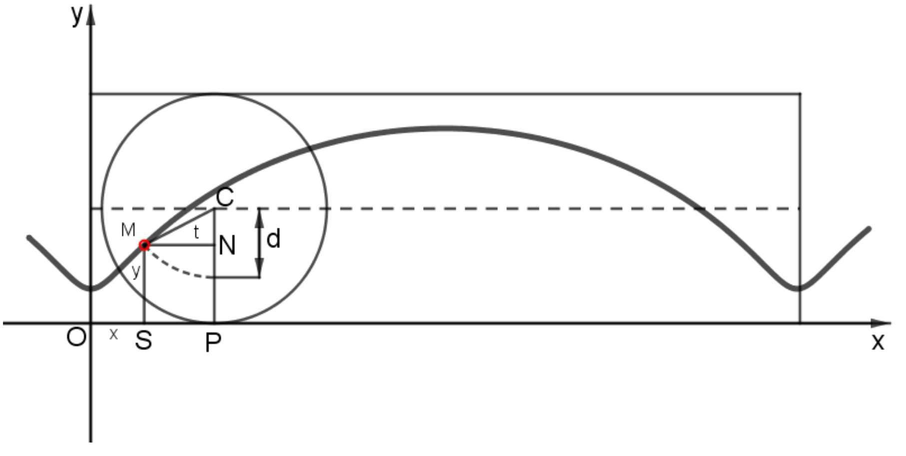

Рис. 2

Если $d < r$, то кривая называется *удлиненной циклоидой*. Она имеет так называемые узловые точки (рис. 3).

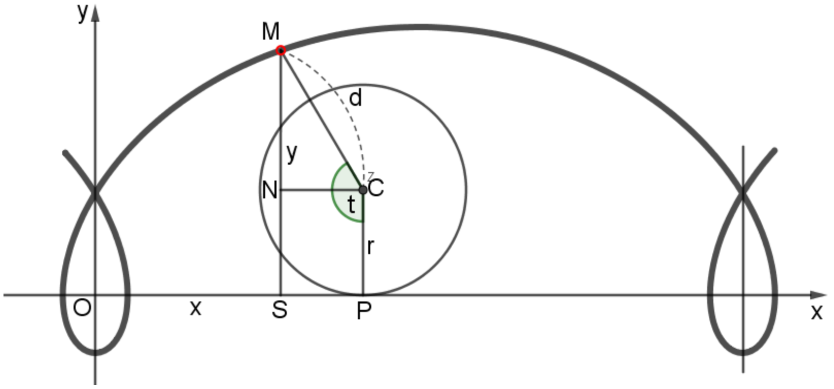

Рис. 3

Когда $d = r$ циклоида называется еще *обыкновеная* или *остроконечная циклоида* (Рис. 1).

3. Параметрические уравнения циклоиды, укороченной и удлиненной циклоид. Выведем параметрические уравнения циклоиды. Примем прямую, по которой катится круг радиуса r, за ось абсцисс. Пусть в исходном положении вычерчивающая точка находилась в начале координат, а после того как круг повернулся на угол t, заняла положение M (рис. 1). Имеем: $x = OS - SP$, $y = MS = CP - CN$. Вычисляя элементы написанных разностей, получим, что $OP = \overset{\frown}{MP} = rt$, $SP = MN = r\sin t$, $CN = r\cos t$. Подставляя найденные значения в формулы для x и y, получим параметрические уравнения циклоиды:

$$(1) \qquad x = rt - r\sin t, \; y = r - r\cos t.$$

Если d – расстояние точки M от центра катящейся окружности (рис. 2, 3), аналогично получаются общие параметрические уравнения укороченной и удлиненной циклоиды в виде:

$$(2) \qquad x = rt - d\sin t, \; y = r - d\cos t.$$

Уравнения (1) остроконечной циклоидой получаются от (2) при $d = r$.

4. Некоторые исследования циклоиды. Из уравнениях (2) следует, что при каждом t_0, точки для которых $t = t_0 + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ тоже находятся на рассматриваемой кривой. Кроме того если $t_0 = 0$ точки пересечния кривой и осью абсцисс имеют координат $(2k\pi r, 0)$. Следовательно кривая является периодическая периодом $2\pi r$.

Через формулах (2) получается, что x можно представит как функция y следующим образом

$$(3)\qquad x = r.\arccos\frac{r-y}{d} - \sqrt{d^2 - (r-y)^2}\,.$$

Отсюда имеем $-1 \le \frac{r-y}{d} \le 1$ и $d^2 - (r-y)^2 \ge 0$. Тогда $r-d \le y \le r+d$. Следователъно циклоида ограничена прямыми $y = r-d$ и $y = r+d$. Из второго равенства (2) увидем, что $y = r-d$ тогда и толко тогда, когда $t = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Следовательно самые нижние точки циклоидой $A_k\left(2k\pi r, r-d\right)$. Опять из второго равенства (2) следует, что $y = r+d$ тогда и толко тогда, когда $t = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Так получается, что самые высокие точки циклоидой $B_k\left((2k+1)\pi r, r+d\right)$. Когда $d = r$ имеем $A_k\left(2k\pi r, 0\right)$, т.е. самые нижние точки лежат на абсцисной осю. Точки A_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ называются *вершины* остроконечной циклоидой. Если $r > d$, самые нижние точки укороченой циклоидой лежат над абсцисной оси, а когда $r < d$, самые нижние точки удлиненной циклоидой лежат под абсцисной оси,

Сейчас отметим, что когда $r \ge d$, уравнение $x = rt - d\sin t = 0$ есть только одно решение $t = 0$. Когда $r < d$, уравнение $x = rt - d\sin t = 0$ есть три решения, одно из котоых является $t = 0$. Остальные две решения дают одну и тоже точку удлиненной циклоидой. Такая точка называется *двойная точка*. Пусть $t_0 \ne 0$ для которого выполнено равенство $d\sin t_0 = rt_0$. Тогда двойные точки удлиненной циклоидой явльются $C_k\left(2k\pi r, r - \sqrt{d^2 - r^2 t_0^2}\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

5. Длина и площадь остроконечной циклоидой. Из равенствах (1) следует, что

$$(4)\qquad \dot{x} = r(1-\cos t) = 2r\sin^2\frac{t}{2},\ \dot{y} = r\sin t = 2r\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}.$$

Длина l аркой остроконечной циклоидой, ограниченой при $0 \le t \le 2\pi$, получаем из (4) следующем образом

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 8r\,.$$

Площадь σ фигуры, ограниченной аркой остроконечной циклоидой при $0 \le t \le 2\pi$, находим по формуле $\sigma = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx$, где интеграл взят по циклоиде. Так из (4) получается $\sigma = -\frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi}(t\sin t + 2\cos t - 2)\,dt = 3\pi r^2$.

6. Свойства касательных и нормали циклоиды. Обратимся к рис. 4, видим, что прямая NK , проходящая через точку M и точку N производящего круга, составляет с осью абсцисс угол, равный $\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$. С другой стороны, пользуясь (4), получаем, что касательная в точке M имеет угловой коефициент $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)$. Следовательно MN являетсят касательной к циклоиде в точке *M*. Так как $\sphericalangle NMP=\frac{\pi}{2}$, то прямая MP будет нормалью циклоиды в точке *M*. Таким образом, касательная к циклоиде в произвольной ее точке проходит через высшую точку производящего круга, а нормаль через низшую точку. Это свойство определяет простой способ построения касательной и нормали в любой точке заданной циклоиды.

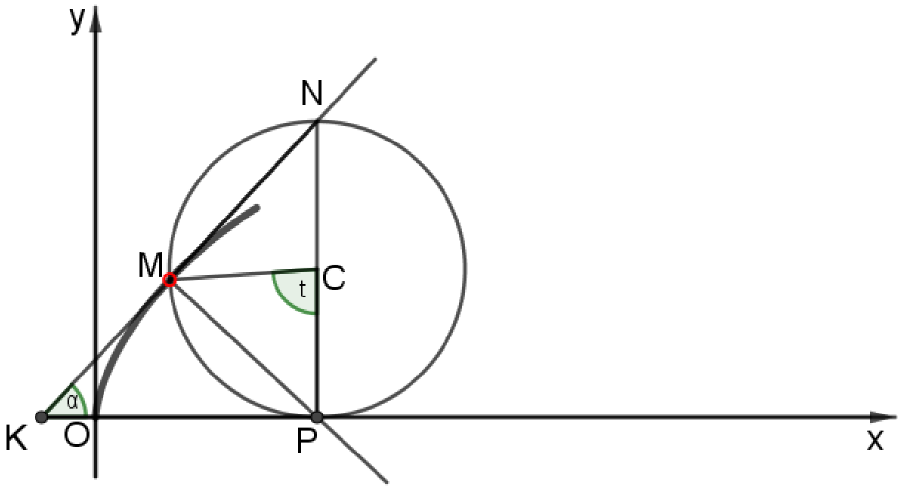

Рис. 4

Рассмотрим треугольник MTT_1, образованный вертикальным диаметром производящего круга, касательной к циклоиде и нормалью к ней. Угол MTT_1, как вписанный в окружность, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, т. е, равен $\frac{\varphi}{2}$.

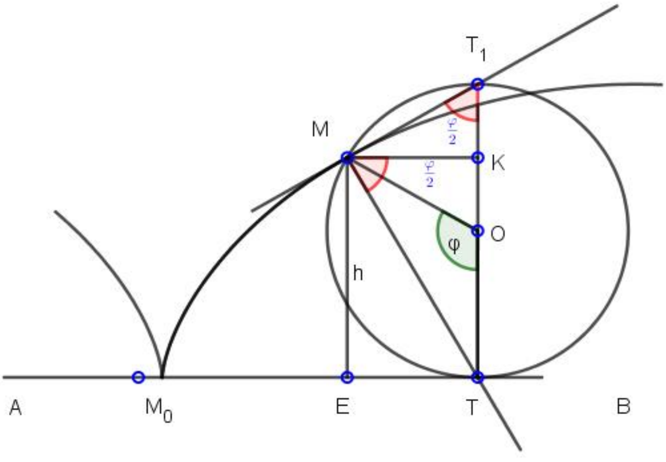

Рис. 5

Проведем $MK \perp TT_1$ и $ME \perp AB$. Отрезок ME будем называть высотой точки M циклоиды и обозначим h. Итак, высота точки M циклоиды – это расстояние ее от направляющей прямой. Обратим внимание, что $\sphericalangle KMT = \sphericalangle MT_1T$. Из треугольника T_1MT получаем: $MT = 2r\sin\dfrac{\varphi}{2}$, из треугольника TKM: $KT = MT\sin\dfrac{\varphi}{2}$. Сопоставляя эти результаты и замечая, что $KT = h$ получим: $h = 2r\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$. Мы выразили высоту точки M через угол между касательной в точке M и вертикалью. Выразим синус этого угла через высоту. Получим:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{h}{2r}} = k\sqrt{h},$$

где $k = \sqrt{\dfrac{1}{2r}}$ постоянная для данной циклоиды.

Теорема. *Синус угла между касательной к циклоиде в точке M и вертикалью пропорционален корню квадратному из высоты.*

Этим свойством обладает любая циклоида.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. https://www.sites.google.com/site/pisemsami/
2. Акопян, А. Геометрия кардиоиды, МЦНМО. http://www.mccme.ru/~akopyan/papers/cardioid.pdf

ЛИТЕРАТУРА

Борисов, Б., Д. Димитров, И. Стефанов, Н. Нинов & Т. Христов. (2018). Гипоциклоида, *Математика и информатика, 4*, 368 – 377, ISSN 1310-2230.

Аскар, И. & К. Сарембаева. (2018). Эпициклоида, *Математика и информатика, 4*, 360 – 367, ISSN 1310-2230.

Коптева, Д. & К. Горская. (2018). Улитка Паскаля, *Математика и информатика, 5*, 465 – 480, ISSN 1310-2230.

Александрова, Н. (2008). *История математических терминов, понятий, обозначений*. Словарь-справочник. Москва: ЛКИ.

Александрова, Н. (1984). *Математически термини*. София: Наука и изкуство.

Берман, Г. *Циклоида*. *Об одной замечательной кривой линии и некоторых других, с ней связанных.* (1980). Москва: Наука.

Болтянский, В. Г. (1961). *Огибающая*. Москва: Гос. из-во физико-математической литературы.

Васильев, Н. Б. & В. Л. Гутенмахер. (2006). *Прямые и кривые*. Москва: МЦНМО.

Норден, А. П. (1958). *Краткий курс дифференциальной геометрии*. Москва: Гос. из-во физико-математической литературы.

Гелерт, В., Х. Кестнер & З. Нойбер. (1983). *Математически енциклопедичен речник*. София: Наука и изкуство, 1983.

Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.

Гроздев, С. & В., Ненков. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.

Маркушевич, А. *Замечательные кривы*. (1952). Москва: Гос. изд-во теоретико-технической литературы.

Савелов, А. *Плоские кривы*. (1960). Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы.

Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев. (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.

Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков. (2016). Первый международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 6*, 567 – 571. (ISSN 1310-2230).

Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков. (2017). Второй международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 5*, 457 – 465. (ISSN 1310-2230).

Атамуратова, Р, М. Алферов, М. Белорукова, В. Ненков, В. Майер, Г. Клековкин, Р. Овчинникова, М. Шабанова & А. Ястребов. (2018). „Энциклопедия замечательных плоских кривых“ – международный сетевой исследовательскии проект в рамках MITE, *Математика и информатика, 6*, 566 – 584, ISSN 1310-2230.

Гроздев, С., В. Ненков & Св. Дойчев. (2012). *За високи постижения в математиката (в помощ на учителя)*. София: Фондация „Миню Балкански“ и фондация „Америка за България“. ISBN 978-954-92830-3-7.

Гроздев, С., В. Ненков & И. Шаркова. (2015). *В помощ на учителя по математика. Сборник от методически разработки.* София: Фондация „Миню Балкански“ и фондация „Америка за България“, ISBN 978-954-92830-5-1.

Генов, Г., С. Миховски & Т. Моллов. (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуства.

Шабанова М. В. и др. (2013). Обучение математике с использованием возможностей GeoGebra: коллективная монография. Москва: Перо.

REFERENCES

Borisov, B., Dimitrov, D., Stefanov, I., Ninov, N. & Hristov, T. (2018). Hypo-cycloid, *Mathematics and Informatics, 4*, 368 – 377, ISSN 1310-2230.

Askar, I. & Sarembaeva, K. (2018). Epicycloid, *Mathematics and Inforrmatics, 4*, 360 – 367, ISSN 1310-2230.

Kopteva, D. & Gorkaya, K. (2018). Pascal’s limacon, *Mathematics and Informatics, 5*, 465 – 480, ISSN 1310-2230.

Alexandrova, N. (2008). *Istoria matematicheskih terminov, ponyatii, oboznachenii. Slovar-spravochnik*. Moscow: LKI (in Russian).

Alexandrova, N. (1984). *Mathematical terminology*. Sofia: Nauka i izkustvo (in Bulgarian).

Berman, G. (1980). *Cycloid. About a notable curve and some others connected with it.* Moscow: Nauka. (in Russian).

Boltyanskii, V. G. (1961). *Envelope*. Moscow: State Publishing House for Mathematics-Physics literature.

Vasilev, N.B. & Gutenmaher, V.L. (2000). *Pryamye i krivye*. Moscow: MTsNMO (in Russian).

Norden, A. P. (1958). *A concise course in Differential Geometry*. Moscow: State Publishing House for Mathematics-Physics literature.
Gellert, W., Kastner, H. & Nueber, S. (1983). *Matematicheski enciklopedichen rechnik*. Sofia: Nauka i izkustvo (in Bulgarian).
Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes (in Bulgarian).
Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). *Three notable points on the medians of the triangle*. Sofia: Archimedes 2000 (in Bulgarian).
Markushevich, A. (1952). *Notable curves*. Moscow: Gos. iz-vo teoretiko-tehnicheskoy literatury (in Russian).
Savelov, A. (1960). *Ploskie krivy*. Moscow: Gos. iz-vo fiziko-matematicheskoy literatury (in Russian).
Sergeeva, T., Shabanova, M. & Grozdev, S. (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU (in Russian).
Grozdev, S. & Nenkov, V. (2017). Gaining new knowledge by computer experiments. *Journal of Educational Sciences & Psychology, vol. VII (LXIX), No 1B*. Special Issue – International Conference Education and Psychology Challenges – Teachers for the knowledge society – 4th edition, May, 122 – 125, ISSN 2247-6377. (ISSN online version 2247-8558).
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics*: The Bulgaria Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).
Shabanova, M., Atamuratova. R., Belorykova, M., Nenkov, V. & Pavlova, M. (2016). The game "Geometry scrabble in cloud" an organizational form of the international student research groups. *Mathematics and education in mathematics, 45*, 223 – 228. (ISSN 1313-3330).
Shabanova, M., Belorykova, M., Atamuratova, R. & Nenkov, V. (2016). The First international set research project of secondary students in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 6*, 567 – 571 (in Russian). (ISSN 1310-2230).
Shabanova, M., Belorykova, M., Atamuratova, R. & Nenkov, V. (2017). Second international set research student ptoject in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 5*, 457 – 465. (in Russian). (ISSN 1310-2230).
Atamuratova, R., Alferov, M., Belorukova, M., Nenkov, V., Mayer, V., Klekovkin, G., Ovchinikova, R., Shabanova, M. & Yastrebov, A. (2018). "Encyclopedia of notable plane curves„Энциклопедия замечательных плоских кривых" – International net research project in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics 6*, 566 – 584, ISSN 1310-2230.
Grozdev, S., Nenkov, V. & Dojchev, S. (2012). For high achievements in Mathematics (support of teachers). Sofia: Foundation Minu Balkanski & Foundation America for Bulgaria". ISBN 978-954-92830-3-7.

Grozdev, S., Nenkov, V. & Sharkova, I. (2015). Support of teachers. Collection of methodological *elaborations*. Sofia: Foundation Minu Balkanski & Foundation America for Bulgaria". ISBN 978-954-92830-5-1.
Genov, G., Mihovski, S. & Molov, T. (1991). *Algebra with number theory.* Sofia: Nauka i Izkustvo.
Shabanova, M. V. et al (2013). *Obuchenie matematiki s ispolzovaniem vozmojnostey GeoGebra*. Moscow: Pero (in Rusian).

CYCLOID

Abstract. The present article describes the results of the sub-team of Kazakhstan – a part of an International team of students, created for the realization of the net research project "Encyclopedia of Notable Plane Curves: We Write by Ourselves". For completing the tasks, students made computer researches by using the software products GeoGebra, Geometer's Sketchpad and Maple. The coordinate method was applied to the proofs of the corresponding hypothesis. The net interaction between the participants has been carried out in Google Cloud.

Keywords: circle; curve; trajectory; cycloid

✉ **Mr. Ayapbergenov Azamat, Student**
Ms. Bokaeva Moldir, Student
Mr. Churymbaev Beknur, Student
Mr. Kaldybek Zhansuygen, Student
Regional Specialized Boarding School for Gifted
Children with In-Depth Study of Various Subjects
Aktau, Kazakhstan
E-mail: azamatayapbergenov282517@gmail.com
E-mail: bokaeva.@mail.ru
E-mail: mr.beknur2016@mail.ru
E-mail: love_00_01@list.ru