

ЧЕВИАНА И СИМЕДИАНА В ТРИЪГЪЛНИК. ТЕОРЕМА НА СТЮАРТ

Румяна Несторова
Враца

Резюме. В статията се разглеждат понятията чевиана, симедиана, теорема на Стюарт и някои техни приложения в несложни задачи. Целта е подходящо надграждане на геометричните познания на учениците за медиана, височина и ъглополовяща на триъгълник. Предложената разработка е насочена към гимназиалните учители, търсещи възможности за развитие на една от ключовите компетентности – математическата компетентност.

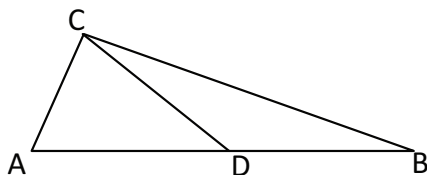
Keywords: mathematical competence, cevian, symmedian, Stewart's theorem

В отговор на очакванията към българското училищно образование и преосмисляне на философията му основна задача на българския учител е да формира у учениците не просто знания и умения, а ключови компетентности, ориентирани към личностно развитие на ученика през целия му живот. Основните начини за развитие на компетентностите са обогатяване на знанията, усъвършенстване на уменията и придобиване на опит. Предложената разработка е в помощ на учителите, търсещи възможности за разширяване на математическата ключова компетентност. Понятията медиана, ъглополовяща и височина в триъгълник са основни геометрични понятия в прогимназиален и гимназиален етап на обучението по математика. Запознаването на учениците от гимназиален етап в ЗИП/ПП, СИП или извънкласните форми на работа по математика с понятията чевиана, симедиана, теоремата на Стюарт и някои техни приложения е подходящо разширяване на тези геометрични познания.

Определение 1. Чевиана¹⁾ от даден връх в триъгълник се нарича всяка отсечка, която съединява върха с точка от срещулежащата му страна или нейното продължение.

В някои източници вместо понятието чевиана се използва понятието недиана (Коларов et al. 1989, с.18), (Гроздев & Лесов, 2012), (Гроздев et al., 2012), (Grozdev, 2007), (Grozdev & Nenkov, 2010).

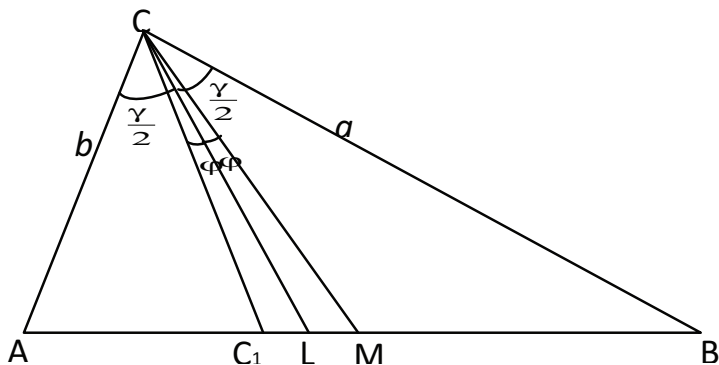
В разработката ще използваме термина *недиана*, синоним на термина *чевиана*.



Чертеж 1

На черт. 1 отсечката CD , където D – произволна точка от страната AB или продължението ѝ, е *недиана* от върха C в $\triangle ABC$.

Определение 2. *Симедиана* от даден връх в триъгълник се нарича отсечка, която съединява върха с точка от срещулежащата му страна и сключва с ъглополовящата от същия връх ъгъл, равен на ъгъла между ъглополовящата и медианата на триъгълника от дадения връх.



Чертеж 2

На черт. 2 са построени симедианата CC_1 ($C_1 \in AB$), ъглополовящата CL на $\angle ACB = \gamma$ ($L \in AB$), медианата CM ($M \in AB$) и съгласно определението $\angle C_1CL = \angle LCM = \varphi$.

От определенията за медиана, ъглополовяща и височина в даден триъгълник и дадените по-горе определения следва, че можем да разглеждаме медианата, ъглополовящата, височината и симедианата от даден връх в произволен триъгълник като **частни случаи на недианата** от този връх.

При означенията на черт. 1:

- 1) ако точката D е среда на $AB \Leftrightarrow AD = DB$, то отсечката CD е медианата m_c от върха C в $\triangle ABC$;
- 2) ако точката D лежи на страната AB и $\angle ACD = \angle BCD = \frac{\gamma}{2}$, то отсечката CD е ъглополовящата l_c на $\angle ACB = \gamma$ в $\triangle ABC$;
- 3) ако точката D лежи на страната AB и $CD \perp AB$, то отсечката CD е височината h_c от върха C в $\triangle ABC$;
- 4) ако точката D лежи на страната AB и $\angle(CD, l_c) = \angle(l_c, m_c)$, където l_c и m_c са съответно ъглополовящата и медианата от върха C , то отсечката CD е симедианата от върха C в $\triangle ABC$.

Теорема (аналог на теоремата за ъглополовящата). Всяка вътрешна симедиана в триъгълник дели срещулежащата страна на отсечки, пропорционални на квадратите на дължините на прилежащите към тях страни.

Доказателство. Ще докажем теоремата за симедианата CC_1 при означенията на черт. 2, т.е. ще докажем, че $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{b^2}{a^2}$. Аналогично теоремата се доказва и за останалите симедиани.

За лицата на $\triangle AC_1C$ и $\triangle BMC$ е в сила равенството

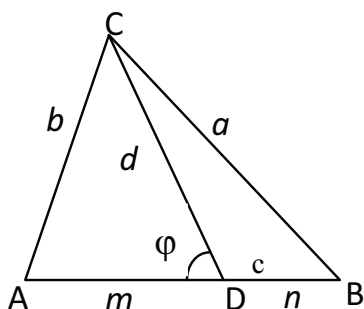
$$\frac{S_{\triangle AC_1C}}{S_{\triangle BMC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC_1 \cdot h_{AC_1}}{\frac{1}{2} \cdot BM \cdot h_{BM}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CC_1 \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right)}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot CM \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right)}, \text{ но } h_{AC_1} = h_{BM} \Rightarrow \frac{AC_1}{BM} = \frac{AC \cdot CC_1}{BC \cdot CM} \quad (1)$$

Аналогично за лицата на $\triangle AMC$ и $\triangle BC_1C$ имаме

$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle BC_1C}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot h_{AM}}{\frac{1}{2} \cdot BC_1 \cdot h_{BC_1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CM \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right)}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot CC_1 \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right)}, \text{ но } h_{AM} = h_{BC_1} \Rightarrow \frac{AM}{BC_1} = \frac{AC \cdot CM}{BC \cdot CC_1} \quad (2)$$

От $AM=BM$ (CM – медиана) и почленно умножаване на (1) и (2) получаваме $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{b^2}{a^2}$.

Теорема на Стюарт²⁾. Нека е даден $\triangle ABC$ със страни $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и произволна точка D , лежаща на страната AB . Ако $CD = d$, $AD = m$, и $DB = n$, то $c \cdot (d^2 + mn) = m \cdot a^2 + n \cdot b^2$ (черт.3).



Чертеж 3

Доказателство. Нека $\angle ADC = \varphi$. От косинусова теорема за $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ получаваме $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \varphi$ (1) и $BC^2 = CD^2 + DB^2 - 2 \cdot DB \cdot CD \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$.

Но $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$, откъдето следва $BC^2 = CD^2 + DB^2 + 2 \cdot DB \cdot CD \cdot \cos \varphi$ (2).

Умножаваме двете страни на първото и второто равенство съответно с DB и AD и събираме почленно, в резултат на което получаваме последователно

$$AC^2 \cdot DB + BC^2 \cdot AD = CD^2 \cdot DB + AD^2 \cdot DB + CD^2 \cdot AD + DB^2 \cdot AD = \\ = CD^2 \cdot (AD + DB) + AD \cdot DB \cdot (AD + DB) = CD^2 \cdot AB + AD \cdot DB \cdot AB = AB \cdot (CD^2 + AD \cdot DB)$$

Окончателно получаваме $c \cdot (d^2 + mn) = m \cdot a^2 + n \cdot b^2 \Leftrightarrow d^2 = \frac{m \cdot a^2 + n \cdot b^2}{c} - mn$ (последното равенство е известно още като уравнение на вятърната мелница).

Твърдението може да бъде доказано и с теоремата на Питагор (задача № 8).

Отделно ще разгледаме теоремата на Стюарт в случаите, когато точката D е от продължението на страната AB (задачи № 9 и № 10).

Чрез теоремата на Стюарт може да се намери дължината на всяка медиана в триъгълник.

Следствия от теоремата на Стюарт

Даден е $\triangle ABC$ със страни $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и точка D , лежаща на страната AB , като $CD = d$, $AD = m$ и $DB = n$.

(1) Нека точката D е среда на AB , $AD = DB$ (т.е. CD – медиана) $\Leftrightarrow m = n = \frac{c}{2}$

$$\Rightarrow CD^2 = d^2 = \frac{m \cdot a^2 + n \cdot b^2}{c} - m \cdot n = \frac{\frac{c}{2} \cdot (a^2 + b^2)}{c} - \frac{c^2}{4} = \frac{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}{4} \Rightarrow \text{медианата}$$

$$CD = m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}, \text{ което учениците знаят от X клас.}$$

(2) Нека точката D лежи на страната AB и $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{b}{a}$ (т.е. CD – ъглополовяща) и тъй като $AD + DB = AB \Leftrightarrow m + n = c \Rightarrow m = \frac{bc}{a+b}$, $n = \frac{ac}{a+b} \Rightarrow$

$$CD^2 = d^2 = \frac{m.a^2 + n.b^2}{c} - m.n = \frac{\frac{bc}{a+b}.a^2 + \frac{ac}{a+b}.b^2}{c} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} \Rightarrow$$

ъглополовящата $CD = l_c = \sqrt{ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}}$, което учениците знаят от X клас.

(3) Нека точката D лежи на страната AB и $CD \perp AB$ (т.е. CD – височина) $\Rightarrow$

$$AD = AC \cdot \cos \angle CAD \Leftrightarrow m = b \cdot \cos \alpha \text{ и } DB = BC \cdot \cos \angle CBD \Leftrightarrow n = a \cdot \cos \beta \Rightarrow$$

$$CD^2 = d^2 = \frac{m.a^2 + n.b^2}{c} - m.n = \frac{b \cdot \cos \alpha \cdot a^2 + a \cdot \cos \beta \cdot b^2}{c} - a \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta,$$

но от косинусова теорема $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ и $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, откъдето

$$\begin{aligned} \text{следва, че } CD^2 = d^2 &= \frac{b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot a^2 + a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot b^2}{c} - a \cdot b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \\ &= \frac{a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c^2 - a^4}{2 \cdot c^2} + \frac{a^2 \cdot b^2 + b^2 \cdot c^2 - b^4}{2 \cdot c^2} - \frac{2 \cdot a^2 \cdot b^2 - b^4 + c^4 - a^4}{4 \cdot c^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4 \cdot c^2} \Rightarrow \text{височината } CD =$$

$$= h_c = \frac{1}{2 \cdot c} \sqrt{2 \cdot (a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Чрез тази формула може да се намери директно дължината на всяка височина в триъгълник, ако са дадени неговите страни. Без познанията за теоремата на Стюарт това се постига чрез пресмятане на лицето на триъгълника по Херонова формула и използване на равенствата $h_a = \frac{2 \cdot S}{a}$, $h_b = \frac{2 \cdot S}{b}$, $h_c = \frac{2 \cdot S}{c}$.

(4) Нека точката D лежи на страната AB и $\frac{AD}{DB} = \frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{b^2}{a^2}$ (т.е. CD – си-

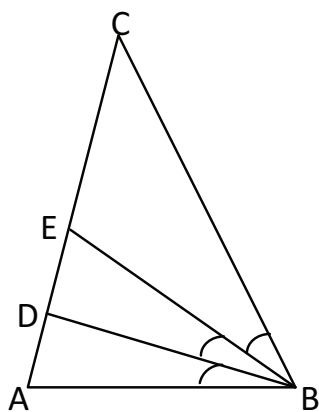
медиана) и тъй като $AD + DB = AB \Leftrightarrow m + n = c \Rightarrow m = \frac{b^2 \cdot c}{a^2 + b^2}$, $n = \frac{a^2 \cdot c}{a^2 + b^2}$

$$\Rightarrow CD^2 = d^2 = \frac{m.a^2 + n.b^2}{c} - m.n = \frac{\frac{b^2 \cdot c}{a^2 + b^2} \cdot a^2 + \frac{a^2 \cdot c}{a^2 + b^2} \cdot b^2}{c} - \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{(a^2 + b^2)^2} \Rightarrow$$

$$\text{дължината на симедианата } CD = \frac{ab}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Приложения в задачи

Задача 1. Недианите BD и BE на $\triangle ABC$ разделят $\angle B$ на три равни части. Да се намерят отсечките AD , DE и EC , ако $AB:BD:BE:BC = 2:\sqrt{3}:2:2\sqrt{3}$, $AC=12$ cm и D е между A и E . Намерете дължините на страните AB и BC и недианите BD и BE .



Черт. 4

Решение. Нека $AB:BD:BE:BC =$

$2.k:\sqrt{3}.k:2.k:2\sqrt{3}.k$, където k – естествено число (черт.4). Съгласно условието BD – ъглополовяща в $\triangle ABE$, откъдето

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BE} \Leftrightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{2.k}{2.k} = 1 \Rightarrow AD = DE \quad (1)$$

Съгласно условието BE – ъглополовяща в $\triangle DBC$, откъдето

$$\frac{DE}{EC} = \frac{DB}{BC} \Leftrightarrow \frac{DE}{EC} = \frac{\sqrt{3}.k}{2\sqrt{3}.k} = \frac{1}{2} \Rightarrow EC = 2.DE \quad (2)$$

От (1), (2) и $AC=12$ cm, следва, че $AD = DE = 3$ cm и $EC = 6$ cm.

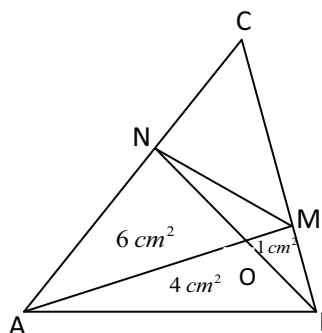
Ако използваме теоремата на Стюарт за недианата BE в $\triangle DBC$, то

$$BE^2 = \frac{EC.DB^2 + DE.BC^2}{DC} - EC.DE \Leftrightarrow (2.k)^2 = \frac{6.(\sqrt{3}.k)^2 + 3.(2\sqrt{3}.k)^2}{9} - 6.3$$

$$\Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow BE = 6 \text{ cm}, DB = 3\sqrt{3} \text{ cm}, BC = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

и тъй като $AB = BE$, то $AB = 6$ cm. Задачата може да бъде решена и по други начини.

Задача 2. Недианите AM и BN на $\triangle ABC$ се пресичат в точка O . Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако лицата на $\triangle BMO$, $\triangle ABO$ и $\triangle AON$ са съответно 1 cm^2 , 4 cm^2 и 6 cm^2 (черт.5).



Чертеж 5

Решение. За лицата на $\triangle ABO$ и $\triangle AON$ е в

$$\text{сила равенството } \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle AON}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BO \cdot h_{BO}}{\frac{1}{2} \cdot ON \cdot h_{ON}}, \text{ но } h_{BO} = h_{ON} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle AON}} = \frac{BO}{ON} \Leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{BO}{ON} \Rightarrow \frac{BO}{ON} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично за лицата на $\triangle OBM$ и $\triangle OMN$

$$\text{имаме } \frac{S_{\triangle OBM}}{S_{\triangle OMN}} = \frac{BO}{ON} \Leftrightarrow \frac{1}{S_{\triangle OMN}} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{\triangle OMN} = 1,5 \text{ cm}^2.$$

За лицата на $\triangle NBM$ и $\triangle NMC$ е в сила равен-

$$\text{ството } \frac{S_{\triangle NBM}}{S_{\triangle NMC}} = \frac{BM}{MC}, \text{ а за лицата на } \triangle ABM \text{ и } \triangle AMC \text{ имаме } \frac{S_{\triangle NBM}}{S_{\triangle NMC}} = \frac{BM}{MC}, \text{ откъ-}$$

$$\text{дето } \frac{S_{\triangle NBM}}{S_{\triangle NMC}} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle AMC}} \Rightarrow \frac{2,5}{S_{\triangle NMC}} = \frac{5}{7,5 + S_{\triangle NMC}} \Rightarrow S_{\triangle NMC} = 7,5 \text{ cm}^2.$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle AON} + S_{\triangle OBM} + S_{\triangle OMN} + S_{\triangle NMC} = 4 + 6 + 1 + 1,5 + 7,5 = 20 \text{ cm}^2.$$

Задача 3. Намерете височината CD , медианата BM и ъглополовящата AL на $\triangle ABC$, $D \in AB$, $M \in AC$, $L \in BC$, ако дължините на страните на триъгълника са $AB = c = 10$, $AC = b = 5$ и $BC = a = \sqrt{77}$.

Решение. Прилагаме изведената формула за пресмятане на височината

$$CD = h_c = \frac{1}{2c} \sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{77}^2 \cdot 5^2 + \sqrt{77}^2 \cdot 10^2 + 5^2 \cdot 10^2) - (\sqrt{77}^4 + 5^4 + 10^4)}}{2 \cdot 10}$$

$$\Rightarrow CD = h_c = \frac{\sqrt{2(77 \cdot 25 + 77 \cdot 100 + 25 \cdot 100) - (77^2 + 25^2 + 100^2)}}{2 \cdot 10} = \frac{\sqrt{24250 - 16554}}{20} = \frac{\sqrt{7696}}{20} = \frac{\sqrt{481}}{5}.$$

Без следствията от теоремата на Стюарт, за да намерим височината CD , трябва да пресметнем лицето S на $\triangle ABC$ по Хероновата формула

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ където } p = \frac{a+b+c}{2}, \text{ т.е.}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{15+\sqrt{77}}{2}\right)\left(\frac{15-\sqrt{77}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{77}+5}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{77}-5}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{15^2-77}{4}\right)\left(\frac{77-5^2}{4}\right)} = \sqrt{481} \text{ и от равен-}$$

$$\text{ството } h_c = \frac{2S}{c} \text{ получаваме } h_c = \frac{2 \cdot \sqrt{481}}{10} = \frac{\sqrt{481}}{5}.$$

За намиране на медианата BM прилагаме познатата формула

$$BM = m_b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(\sqrt{77}^2 + 10^2) - 5^2} = \frac{\sqrt{329}}{2}.$$

От формулата $AL = l_a = \sqrt{b^2 - \frac{bca^2}{(b+c)^2}}$ намираме

$$AL = l_a = \sqrt{5 \cdot 10 - \frac{5 \cdot 10 \cdot \sqrt{77}^2}{(5+10)^2}} = \sqrt{\frac{296}{9}} = \frac{2 \cdot \sqrt{74}}{3}.$$

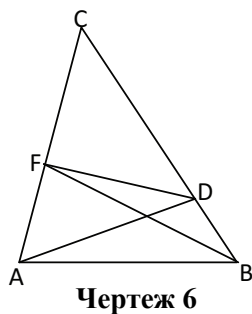
Задача 4. Докажете, че в правоъгълен триъгълник $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) симедианата CD ($D \in AB$) към хипотенузата съвпада с височината h_c към хипотенузата.

Решение. Съгласно изведената формула симедианата

$$CD = \frac{ab}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

По условие $\triangle ABC$ – правоъгълен, следователно $a^2 + b^2 = c^2$ и лицето $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$. Окончателно получаваме $CD = \frac{ab}{c^2} \cdot \sqrt{2 \cdot c^2 - c^2} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{2 \cdot S}{c} = h_c$.

Задача 5. Отсечките AD и BF са съответно медиана и ъглополовяща в $\triangle ABC$, $D \in BC$, $F \in AC$. Да се намери FD , ако $AC = 7$, $AF = 3$, $CD = 5$ и $DB = 4$.



Черт. 6

Решение. $FC = AC - AF = 4$, $CB = CD + DB = 9$ (черт. 6).

От BF – ъглополовяща, следва

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AF}{FC} \Leftrightarrow \frac{AB}{9} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}.$$

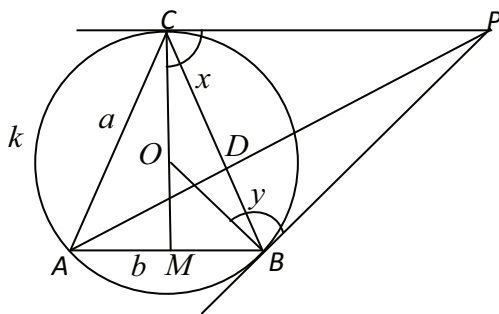
$$BF = \sqrt{AB \cdot BC - AF \cdot FC} = \sqrt{\frac{27}{4} \cdot 9 - 3 \cdot 4} = \sqrt{\frac{195}{4}}.$$

Прилагаме теоремата на Стюарт за медианата FD в $\triangle BCF$ и получа-

$$\text{ваме } FD^2 = \frac{CD \cdot FB^2 + DB \cdot FC^2}{CB} - CD \cdot DB = \frac{5 \cdot \left(\sqrt{\frac{195}{4}}\right)^2 + 4 \cdot 4^2}{9} - 5 \cdot 4 \Rightarrow FD = \frac{\sqrt{511}}{6}.$$

Даденото решение е примерно, задачата може да бъде решена и по други начини.

Задача 6. В окръжност е вписан $\triangle ABC$, в който $AC = CB = a$ и $AB = b$. През върховете B и C са построени допирателни, пресичащи се в точка P , а D е пресечната точка на BC и AP . Намерете CD , DB и AD .



Чертеж 7

Решение. Ако точката O е център на описаната окръжност k , то от условието $AC = CB = a$ следва, че $O \in CM$, където $CM \perp AB$, $M \in AB$ (черт. 7). Построяваме допирателните към k в точките B и C и пресечната им точка P , откъдето следва $CP = BP$.

От $CP \perp CO$, $CM \perp AB \Rightarrow CP \parallel AB$

$\Rightarrow \angle PCB = \angle ABC$ като кръстни ъгли (1).

От $AC = CB \Rightarrow \angle CAB = \angle ABC$ (2)

и от $CP = BP \Rightarrow \angle PCB = \angle CBP$ (3).

Освен това $\angle CDP = \angle ADB$ като върхни ъгли (4). От подобие на $\triangle ABC$ и $\triangle CBP$ съгласно (1), (2) и (3) следва $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{CP} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{CP} \Rightarrow CP = \frac{a^2}{b}$.

От подобие на $\triangle PDC$ и $\triangle ADB$ съгласно (1) и (4) следва

$$\frac{CP}{AB} = \frac{CD}{DB} \Leftrightarrow \frac{\frac{a^2}{b}}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2} \quad (5), \text{ където } x = CD, y = DB.$$

Но $CD + DB = CB \Leftrightarrow x + y = a$ (6). От (5) и (6) получаваме системата
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2} \\ x + y = a \end{cases}$$

с решения $x = CD = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$, $y = DB = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$. Прилагаме теоремата

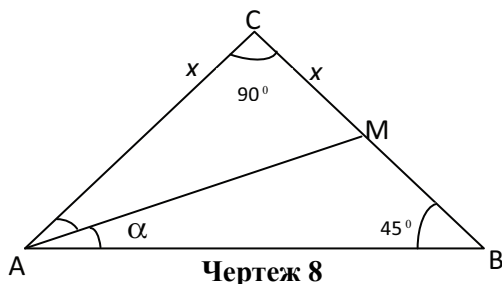
на Стюарт за медианата AD в $\triangle ABC$ и получаваме

$$AD^2 = \frac{CD \cdot AB^2 + DB \cdot AC^2}{CB} - CD \cdot DB = \frac{\frac{a^3}{a^2 + b^2} \cdot b^2 + \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \cdot a^2}{a} - \frac{a^3}{a^2 + b^2} \cdot \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{ab}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2b^2 + a^2}.$$

По-наблюдателните ученици могат още от равенство (5) да стигнат до извода, че AD е симедиана и да намерят дължината ѝ по съответната формула.

Задача 7³. Отсечката AM ($M \in BC$) е медиана в равнобедрения правоъгълен $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Да се намери $\sin \angle CAM$, ако $\sin \angle MAB = 1 - k$. При коя стойност на k медианата AM е ъглополовяща на $\angle CAB$?



Решение. Нека $\angle MAB = \alpha \Rightarrow \sin \angle CAM = \sin (45^\circ - \alpha)$

$$\Rightarrow \sin \angle CAM = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - (1 - k)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 - k)$$

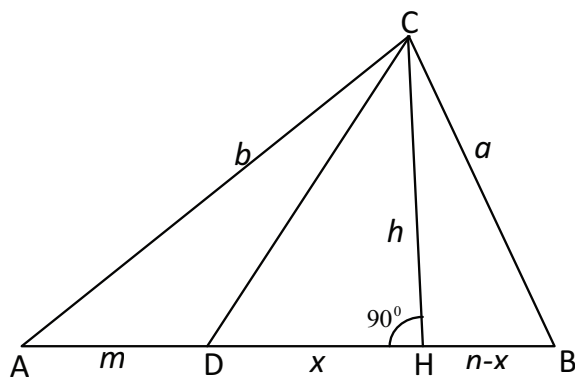
$$\Rightarrow \sin \angle CAM = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2k - k^2} + k - 1)}{2}.$$

Ако AM е ъглополовяща на $\angle CAB$, то $\sin \angle MAB = 1 - k = \sin \frac{45^\circ}{2}$, но

$$\sin \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow 1 - k = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow k = \frac{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Задачи за самостоятелна работа

Задача 8. Докажете теоремата на Стюарт чрез теоремата на Питагор.



Чертеж 9

Упътване⁴⁾: постройте височината CH ($H \in AB$) и при означенията на черт.9 приложете Питагорова теорема за $\triangle HBC$, $\triangle AHC$ и $\triangle DHC$ и идеята от доказателството чрез косинусова теорема.

Задача 9. Нека е даден $\triangle ABC$ със страни $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и точка D , лежаща на правата AB . Ако точката B лежи между точките A и D , $CD = d$, $AD = m$ и $DB = n$, то докажете, че $c \cdot (d^2 - mn) = m \cdot a^2 - n \cdot b^2$.

Упътване. Приложете теоремата на Стюарт за медианата CB в $\triangle ADC$.

Задача 10. Нека е даден $\triangle ABC$ със страни $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и точка D , лежаща на правата AB . Ако точката A лежи между точките D и B , $CD = d$, $AD = m$ и $DB = n$, то докажете, че $c \cdot (d^2 - mn) = -m \cdot a^2 + n \cdot b^2$.

Упътване: приложете теоремата на Стюарт за медианата CA в $\triangle DBC$.

NOTES / БЕЛЕЖКИ:

1. <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1190794>
2. https://bg.wikipedia.org/wiki/Теорема_на_Стьюарт
3. <https://www.math10.com/forumbg/viewtopic.php?t=13068>
4. <https://www.math10.com/forumbg/viewtopic.php?t=9564>

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Kolarov, K., V. Mihaylov, P. Arnaudov, H. Lesov & U. Batalaska (1989). *Sbornik ot zadachi po geometriya VII – X klas* (s.18, 25, 45, 66, 113). Sofia: Izd. „Narodna prosveta“. [Коларов, К., В. Михайлов, П. Арnaudов, Х. Лесов & У. Баталска (1989). *Сборник от задачи по геометрия VII – X клас* (с.18, 25, 45, 66, 113). София: Народна просвета.]
- Paskalev, G. & I. Chobanov (1985). *Zabelezhitelni tochki v triagalnika* (s. 81). Sofia: Izd. „Narodna prosveta“. [Паскалев, Г. & И. Чобанов (1985). *Забележителни точки в триъгълника* (с. 81). София: Народна просвета.]
- Grozdev, S. & H. Lesov (2012). *Zimni matematicheski sastezaniya*. Sofia: VUZF. (ISBN 978-954-8590-17-4), 351 stranitsi. [Гроздев, С. & Х. Лесов (2012). *Зимни математически състезания*. София: ВУЗФ. (ISBN 978-954-8590-17-4), 351 страници.]
- Grozdev, S., V. Nenkov & S. Doychev (nauchna redaktsiya) (2012). *Za visoki postizheniya v matematikata (v pomosht na uchitelya)*. Sofia: Fondatsii “M. Balkanski” i “Amerika za Balgaria”. (ISBN 978-954-92830-3-7), 204 stranitsi. [Гроздев, С., В. Ненков & С. Дойчев (научна редакция) (2012). *За високи постижения в математиката (в помощ на учителя)*. София: Фондации „М. Балкански“ и „Америка за България“. (ISBN 978-954-92830-3-7), 204 страници.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2010). Two Remarkable Points of the Triangle Geometry. *Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications (REMIA 2010), Proceedings of the Anniversary International Conference Dedicated to the 40-th Anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv University, 10 – 12 December, 2010*, Plovdiv, 349 – 354 (ISBN 978-954-423-648-9).

CEVIAN AND SYMMEDIAN IN THE TRIANGLE. STEWART' S THEOREM

Abstract. The article examines the concepts of cevian, symmedian, Stewart' s theorem and some of their applications in simple tasks. The aim is an appropriate upgrade of students' geometric knowledge related to the median, the angle bisector and the altitude in the triangle. The proposed research is directed to High school teachers looking for opportunities to develop one of the key competences – the mathematical one.

✉ **Mrs. Romyana Nestorova, PhD student**

3000 Vratsa

Bulgaria

E-mail: rumiana_nestorova@abv.bg