

ЧЕТИРИДЕСЕТ И ПЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

¹⁾Сава Гроздев, ²⁾Росен Николаев, ³⁾Станислава Стоилова,
Веселин Ненков

¹⁾ Висше училище по застраховане и финанси – София

²⁾ Икономически университет – Варна

³⁾ Университет по архитектура, строителство и геодезия – София

Резюме. Предложени са методически решения на задачите от темата за група В на Националната студентска олимпиада през 2018 г. В тази група се състезават студенти, изучаващи математика в първи курс на висшите училища в България с хорариум, не по-голям от 240 часа. Включени са и критериите за оценяване на задачите.

Keywords: Olympiad; university student; problem solving; assessment

Задача 1. Ако a_{ij} е остатъкът на числото $i^j + j^i$ при деление с 2, където i и j са естествени числа, да се пресметнат детерминантите:

$$\text{а) } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Решение: Четността на числото i^j не зависи от степента j . Същото важи и за четността на числото j^i , която не зависи от степента i . Оттук заключаваме, че $a_{ij} = 0$, ако $i + j$ е четно число и $a_{ij} = 1$, ако $i + j$ е нечетно число. Тогава

$$\text{от а) } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ и от б) } \Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \text{ Първата детерминанта очевидно}$$

е равна на -1, защото първото твърдение не е вярно. Втората е равна на нула, защото има (например) два равни реда.

Задача 2. Да се намерят всички цели числа x_1, x_2, x_3 и x_4 , ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 - 2x_3x + x_4 = 0$, а x_3 и x_4 са корени на уравнението $x^2 - 2x_1x + x_2 = 0$.

Решение: От формулите на Виет, приложени за двете квадратни уравнения, имаме следната нелинейна алгебрична система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 \\ x_1 \cdot x_2 = x_4 \\ x_3 + x_4 = 2x_1 \\ x_3 \cdot x_4 = x_2 \end{cases}$$

Ако в четвъртото уравнение заместим x_4 от второто уравнение, получаваме $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = x_2$.

Случай 1. $x_2 = 0$. Тогава от второто уравнение $x_4 = 0$. Сега първото и третото уравнение стават съответно $x_1 = 2x_3$ и $x_3 = 2x_1$. Оттук $x_1 = 4x_1$ и следователно $x_1 = 0$. С помощта на първото уравнение заключаваме, че $x_3 = 0$. В този случай стигаме до решение на задачата, което е $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Случай 2. $x_2 \neq 0$. Тогава от $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = x_2$, като съкратим на x_2 , получаваме $x_1 \cdot x_3 = 1$. Тъй като търсим цели решения, стигаме до два подслучая.

Случай 2.1. $x_1 = x_3 = 1$. Сега от първото уравнение в системата следва $x_2 = 1$. Заместваме във второто уравнение и получаваме $x_4 = 1$. В този подслучай стигаме до решение на задачата, което е $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Случай 2.2. $x_1 = x_3 = -1$. Сега от първото уравнение в системата следва $x_2 = -1$, а от третото получаваме $x_4 = -1$. Заместваме в четвъртото уравнение и стигаме до противоречие. В този случай не стигаме до решение на задачата.

Окончателно задачата има 2 решения $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ и $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

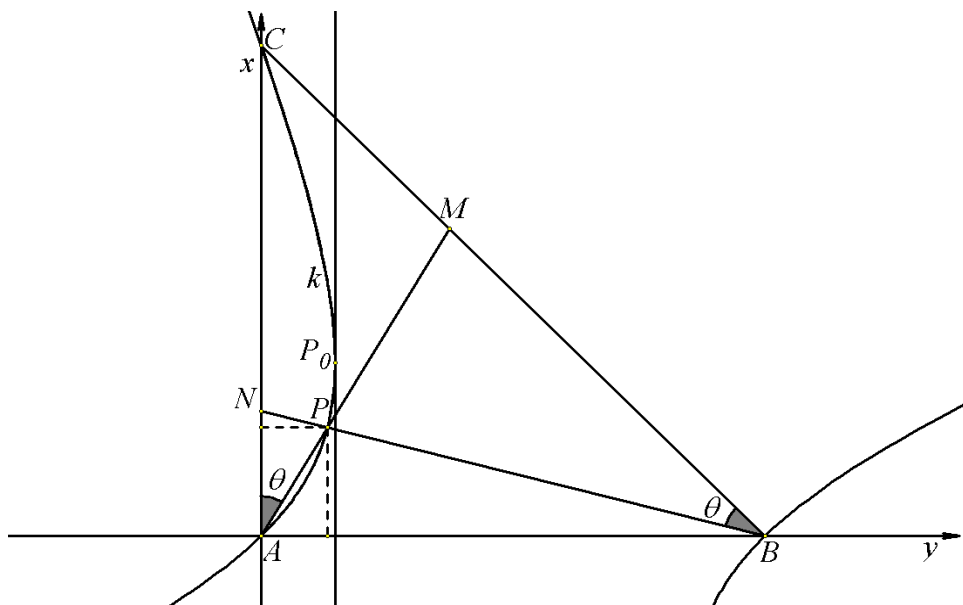
Задача 3. Спрямо правоъгълна координатна система в равнината точките $A(0;0)$, $B(1;0)$ и $C(0;1)$ са върхове на $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ и $AB = AC = 1$. Точките M и N са съответно върху страните BC и AC , така че $\sphericalangle CBN = \sphericalangle CAM$ и $AM \cap BN = P$.

а) Да се определят уравнението и видът на кривата k , която описва P , когато точката M описва отсечката BC .

б) Ако P_0 е вътрешна точка за $\triangle ABC$, така че допирателната t_0 към k през P_0 е успоредна на AC , да се определят разстоянията от P_0 до AB и AC .

Решение

а) Ако $\angle MAC = \theta$, то $\angle ABP = 45^\circ - \theta$. Нека x и y са координатите на P . Тогава $\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{y}$ и $\operatorname{tg}(45^\circ - \theta) = \frac{y}{1-x}$. Имаме $\operatorname{tg}(45^\circ - \theta) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \theta}$ и $\frac{y}{1-x} = \frac{1 - \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}}$. Търсената крива е $k: x^2 - 2xy - y^2 - x + y = 0$, която записваме във вида



$$(x-y)^2 - 2y^2 - (x-y) = 0. \quad \text{Оттук} \quad \left(x-y-\frac{1}{2}\right)^2 - 2y^2 = \frac{1}{4} \quad \text{и}$$

$$k: \frac{\left(x-y-\frac{1}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ където } a = \frac{1}{2} \text{ и } b = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \text{ Последното равенство}$$

означава, че k е хипербола с полуоси $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Центърът ѝ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

е средата на катета AB .

б) Нека x_0 и y_0 са координатите на P_0 . Общите точки на правата t_0 с уравнение $x = x_0$ и k удовлетворяват уравнението $y^2 + (2x_0 - 1)y - x_0^2 + x_0 = 0$. Правата t_0 има само една обща точка с k тогава и само тогава, когато $(2x_0 - 1)^2 - 4(x_0 - x_0^2) = 0$. Това е изпълнено, когато $x'_0 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ и $x''_0 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$. След заместване в последното уравнение относно y получавате $y'_0 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ и $y''_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Само точката $(x''_0, y''_0) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ е вътрешна за $\triangle ABC$ и следователно $P_0\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Разстоянията до AB и AC са съответно $\frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ и $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Критерии за оценяване на задачите

Задача 1. По 5 точки за правилно пресметнати и посочени отговори.

Задача 2. За правилно посочени верни отговори по 1 точка за всеки отговор – общо 2 точки. За правилна обосновка на всеки от отговорите допълнително се присъждат по 4 точки. Частични резултати се оценяват в рамките на 1 – 2 точки за правилно изписване на системата от четири уравнения с четири неизвестни въз основа на формулите на Виет и наличие на правилно тръгване към решаването на системата. В рамките на 1 – 2 точки се оценяват и частични резултати с други подходи, а не с формулите на Виет – например чрез формулата за квадратно уравнение.

Задача 3. Подточка а) се оценява общо с 6 точки при посочено правилно решение, от които 3 точки за получаване уравнението на хиперболата и още 3 точки – за намиране на каноничния вид, посочване вида на кривата, осите и центъра.

Подточка б) се оценява общо с 4 точки, от които 2 точки за получаване на условието за допирателната към кривата и анулиране на съответната дискриминанта. Допълнително се присъждат 2 точки за получаване координатите на точката P_0 и посочване на разстоянията до катетите на триъгълника.

45TH NATIONAL OLYMPIAD IN MATHEMATICS FOR UNIVERSITY STUDENTS

Abstract. Methodological solutions are proposed of the problems from the paper for Group B of the Forty fifth national Olympiad in Mathematics for University students in 2018. The contestants in this group are students who study Mathematics no more than 240 classes during the first year in the Bulgarian Universities.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Prof. Dr. Rosen Nikolaev**

University of Economics – Varna
77, Kniaz Boris I Blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg

✉ **Dr. Stanislava Stoilova, Assoc. Prof.**

University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy
1, Hristo Smirnenki Blvd.
1046 Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislavast@yahoo.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

E-mail: vnenkov@mail.bg