Educational Technologies
Образователни технологии

БОЛГАРСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИНАНСОВОЙ И АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ В РОССИИ

[1)]Росен Николаев, [2)]Сава Гроздев, [3)]Богдана Конева,
[3)]Нина Патронова, [3)]Мария Шабанова
[1)] Экономический университет – Варна (Болгария)
[2)] Высшая школа страхования и финансов – София (Болгария)
[3)] Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова – Архангельск (Россия)

Аннотация. Повышение финансовой грамотности всех слоев населения - это глобальная задача, на решение которой направлен целый ряд международных и национальных проектов. Очевидно, что данная проблема не может найти удовлетворительного решения, если не привлечь внимание широкой общественности к значимости математических знаний и умений для адекватного понимания, и оценки финансовой ситуации, принятия грамотных решений. Именно эту цель преследует олимпиада, учрежденная двумя болгарскими экономическими вузами: Экономическим университетом – Варна, и Высшей школой страхования и финансов – София. В 2018-2019 учебном году Болгарская олимпиада по финансовой и актуарной математике проходила в России уже третий раз. В данной статье представлены решения олимпиадных заданий, а также данные о трудностях, возникших у студентов и школьников при их выполнении. Авторы надеются, что эти сведения будут полезны как разработчикам олимпиады, так и тем, кто занимается подготовкой участников олимпиады.

Ключевые слова: финансовая грамотность; олимпиада; математические методы; финансовая математика; актуарная математика

Введение

Во всем мире, начиная с 2011 года уделяется большое внимание вопросам повышения финансовой грамотности всех слоев населения: проводятся сравнительные исследования, инициируются международные и национальные проекты по финансовому образованию.

Такая работа ведется и в Российской Федерации в рамках проекта Министерства финансов РФ «Содействие повышению уровня финансовой грамотности населения и развитию финансового образования в Российской Федерации». Он реализуется совместно с международным банком с 2011 года.

В рамках данного направления деятельности создана сеть федеральных и региональных методических центров по обучению и повышению квалификации педагогов общеобразовательных организаций, преподавателей образовательных организаций высшего образования и тьюторов для взрослого населения. Ими организуются научно-популярные лектории, проводятся конкурсные мероприятия, разрабатываются образовательные программы, обеспечивается участие пенсионеров, работающих граждан, студентов и школьников в мониторинговых исследованиях уровня финансовой грамотности.

В 2017 году в Российской Федерации была принята Стратегия повышения финансовой грамотности на 2017 – 2023 годы. Этим документом была признана значимость согласованной и планомерной работы всех образовательных организаций, социальных и финансовых институтов в решении задачи достижения высокого уровня финансовой грамотности всех слоев населения.

В 2012, 2015 и 2018 годах Российские школьники (15-летние) принимали участие в сравнительных международных исследованиях PISA. Их результаты свидетельствуют о том, что определенные успехи достигнуты. Проблемной зоной остается владение основами финансовой арифметики. Это подтверждается и результатами национальных исследований, проводимых в рамках проекта «Содействие повышению уровня финансовой грамотности населения и развитию финансового образования в Российской Федерации» в 2013 и 2015 годах.

Расширение числа участников от России в Болгарской олимпиаде по финансовой и актуарной математике, как нам кажется, должно привлечь внимание всех категорий населения к той роли, которые играют математические методы в принятии обоснованных финансовых решения и адекватной оценке поступающей информации.

Об олимпиаде

Преподаватели математики экономических вузов Болгарии очень озабочены постепенным распространением, даже в кругах специалистов, ошибочного мнения о том, что для грамотной оценки финансовых ситуаций и принятия правильных экономических решений вовсе не нужно владение математическими методами, достаточно знаний законодательной базы и владения IT-технологиями.

Олимпиада была учреждена для повышения мотивации школьников и студентов к изучению математики в 2016 году. Подробно ее история и идейная основа описана в статье (Grozdev, Nikolaev, Shabanova, Forkunova & Patronova, 2018). Напомним здесь лишь, что олимпиадное задание включает 7 задач, из которых 5 задач с выбором ответа. Они оцениваются в 3 балла. Одна задача требует представление собственного результата и оценивается в 5 баллов. Последняя задача требует развернутого описания решения и оценивается в 10 баллов. Тематика задач олимпиады затрагивает математические основы анализа и оценки информации и принятия оптимальных решений в следующих ситуациях: динамика цен и инфляции; кредиты и условия досрочного погашения; движение средств на зарплатном счёте; инвестиции; страхование; срочные депозиты; динамика процентных ставок; оперирование вложениями. Олимпиада проводится в 4 возрастных категориях: V – VI классы, VII – IX классы, X – XI (12) классы, студенты и граждане.

Читатели могут заметить, что структура и содержание олимпиадных заданий перекликается, но не полностью совпадает с заданиями национальной олимпиады по финансовой грамотности, которая стала проводиться в Болгарии с 2019 года. Это не случайно, ведь решение об учреждении национальной олимпиады (https://www.mon.bg/bg/80) было принято под влиянием международной. Авторы очень рады этому обстоятельству. Это значит, что учредители олимпиады достигли своей цели, по крайней мере на национальном уровне. В других странах (России, Македонии, Казахстане) круг участников олимпиады постепенно расширяется. В России олимпиада по финансовой и актуарной математике проходит уже третий раз. Официальным представителем учредителей здесь выступает Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (САФУ), который давно сотрудничает с Болгарии в рамках международного проекта «Методики и информационные технологии в образовании» и не только. Российским школьником и студентам очень нравятся Болгарские математические состязания, поэтому они с радостью приняли предложение – принять участие в олимпиаде по финансовой и актуарной математике. В 2016 – 2017 учебном году в ней приняло участие – 532 человек, в 2017-2018 - 967 человек, в этом году – 598 человек.

Олимпиадные задачи 2018 – 2019 учебного года

3.1. Возрастная категория 5-6 классы

Задача 1. На горнолыжном курорте в Болгарии до начала сезона можно купить экипировку: лыжи, палки и обувь за 1225 лев (лев – болгарская денежная единица), а в разгар лыжного сезона цена возрастает до 1470 лев. На какую часть от первоначальной цены возрастает стоимости экипировки в разгар сезона?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** более $\frac{1}{3}$

Решение. примем за целое стоимость экипировки до начала сезона, найдем, на сколько она повысилась: $1470 - 1225 = 245$ (лев).

Тогда искомым является отношение: $\frac{245}{1225} = \frac{1}{5}$.

Ответ: А.

Задача 2. За два месяца до «Черной пятницы» цена на товар была повышена на $\frac{1}{10}$, а в «Черной пятницу» новая цена была снижена на $\frac{1}{10}$. Какую часть после второго изменения стала составлять цена товара от первоначальной?

A) $\frac{9}{10}$ **B)** $\frac{99}{100}$ **C)** 1 **D)** $\frac{100}{99}$ **E)** более $\frac{100}{99}$

Решение. Пусть товар стоил S рублей. После повышения он стал стоить $S\frac{11}{10}$. После понижения цена составила: $S\frac{11}{10}\cdot\frac{9}{10}=S\frac{99}{100}$. Ответ: B.

Задача 3. В России за отправку денег почтовым переводом до 1000 руб. Взимается дополнительная плата: 40 руб. плюс 5% от переводимой суммы. У Ивана 800 руб. Найдите наибольшее целое число в рублях, которое может отправить Иван.

A) 723 руб. **B)** 761 руб. **C)** 763 руб. **D)** 772 руб. **E)** 783 руб.

Решение. Обозначим за χ (руб.), количество денег, которые он может отправить переводом. Тогда получаем неравенство: $x+40+0{,}05x\leq 800$. Наибольшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству – 723 руб. Наличие вариантов ответа позволяло учащимся 6 класса, которые не владеют методами решения линейных неравенств, обойтись чисто вычислительными методами. Достаточно было оценить значение выражения $x+40+0{,}05x$ для каждого из предложенных значений χ. Ответ: А.

Задача 4. Болгарская фирма закупила 3 компьютера и 2 принтера общей стойностью 3600 лв. Если бы фирма купила 2 компьютера и 3 принтера, то она заплатила бы на 1400 лв. меньше. Сколько ей пришлось бы заплатить, если бы она покупала один компьютер и один принтер?

A) 1250 лв. **B)** 1200 лв. **C)** 1160 лв. **D)** 1000 лв. **E)** 950 лв.

Решение. Обозначим стоимость одного компьютера за χ а принтера за y. Тогда получим два уравнения: $3x+2y=3600$, $2x+3y=2200$. Идея решения (прием, неизвестный учащимся 6 класса) заключается в уравнивании коэффициентов за счет сложения частей уравнений: $5x+5y=5800$. Откуда, $x+y=1160$ (лв.). Ответ: С.

Задача 5. Болгарский магазин продает графины и стаканы одного вида. Цены за одну штуку - целые числа в левах. Если 141 графин и 94 стакана вместе стоят 1880 лв., какой может быть самая высокая цена за один графин в левах?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** более 13

Решение: Обозначим стоимость одного графина за χ а стакана за у.. Тогда задача сводится к решению диофантова уравнения: $141x+94y=1880$.

Заметим, что все его члены кратны 47. Получаем: $3x + 2y = 40$. . Для того, чтобы χ было наибольшим целым числом необходимо, подобрать наименьшее целое y, такое чтобы выражение $40 - 2y$ было кратно 3. Это $y = 2$. Откуда получаем, что $x = 12$. Ответ: C.

Задача 6. (задача с кратким ответом) На рынке ровно 6% яблок и 8% груш были признаны бракованными. Остальные яблоки и груши хорошего качества. Если все груши на этом рынке весят 300 кг, а количество килограмм забракованных груш равно количеству килограмм забракованных яблок, то сколько на рынке качественных яблок в килограммах?

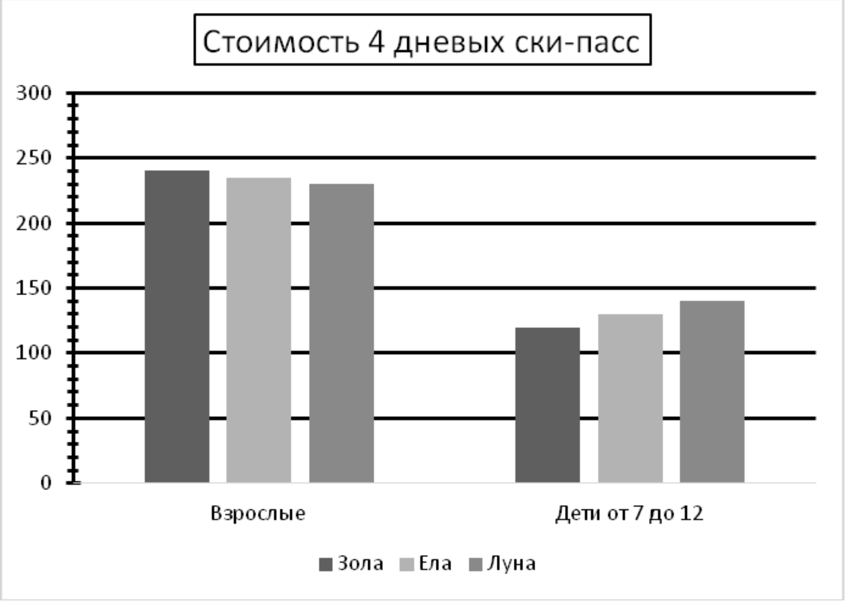
Решение. Бракованных яблок на рынке столько же, сколько и бракованных груш, т.е. $0{,}08 \cdot 300 = 24$ (кг.). Тогда всего на рынке $24 \cdot \frac{100}{6} = 400$ (кг.) яблок. Следовательно, качественных, из них $400 - 24 = 376$ (кг.). Ответ: 376.

Задача 7. (задача с развернутым ответом) Успехи школьников Болгарии оцениваются по шестибальной шкале: 6 – «отлично»; 5 – «очень хорошо», 4 – «хорошо», 3 – «средне», 2 – «слабо» и 1 – «неудовлетворительно». Первое полугодие 25% учащихся класса закончило с оценкой отлично по математике, 1/3 учеников закончило с оценкой «очень хорошо» по этому предмету, количество тех, кто получил оценку «хорошо», относится к количеству тех, кто получил оценку «средне» как 3 : 2. Известно, что никто в классе не имеет «слабого» и «неудовлетворительно». Какая часть учащихся класса имеет оценку «средне»?

Решение. Пусть в классе x учеников, тогда те, кто имеют оценки «средне» и «хорошо» составляют $x - \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{3}\right) = \frac{5x}{12}$. Известно, что количество тех, кто имеет оценку хорошо составляют 3:2, то тех, кто имеет оценку «средне». В итоге получаем: $\frac{2x}{12} = \frac{x}{6}$. Ответ: $\frac{1}{6}$.

3.2. Возрастная категория VII – IX классы.

Задача 1. На графике показаны цены на 4-дневные ски-пасс (билеты на подъемники) для трех зимних курортов Болгарии: Зора, Ела и Луна. На одном из этих курортов стоимость однодневного ски-пасс составляет 62,50 левов для взрослого, но на 4-дневный билет предоставляется скидка в 6%. На каком курорте действует эта скидка? На каком курорте самый дешевый вариант для покупки пакета 4-дневного ски-пасс на семью из двух взрослых и двух детей?



A) „Ела“ и „Луна“ **B)** „Луна“ и „Ела“ **C)** „Зора“ и „Луна“ **D)** „Ела“ и „Зора“ **E)** „Луна“ и „Зора“

Решение. Стоимость 4-х дневного ски-пасс с указанной скидкой составляет: $62{,}5 \cdot 4 \cdot (1 - 0{,}06) = 235\ (\text{лв.})$. Это соотвествует стоимости на курорте Ела. Стоимость 4-дневного ски-пасс для семьи из 2 детей и 2 взрослых составляет:

На курорте Зола:

$2(240 + 120) = 720$ лв., на курорте Ела: $2(235 + 130) = 730$ лв., на курорте Луна: $2(230 + 140) = 740$ **лв.** Ответ: D.

Задача 2. В одном магазине Болгарии чайник «Amosa» на 6 левов дешевле, чем кофеварка той же фирмы, а кофеварка на 30% дороже чайника? Сколько стоит кофеварка и сколько стоит чайник?

Кофеварка 24 лв., Чайник 18 лв. **B)** Кофеварка 26 лв., Чайник 20 лв.

C) Кофеварка 18 лв., Чайник 12 лв. **D)** Кофеварка 16 лв., Чайник 10 лв.

E) Кофеварка 16 лв. Чайник 8 лв.

Решение. Пусть x (лв.) – стоимость чайника. Тогда стоимость кофеварки: $x + 6 = 1{,}3x$. Откуда получаем: $x = 20$ **лв.** Стоимость кофеварки $20 + 6 = 26$ лв.

Ответ: B.

Задача 3. Два банка предлагают простые годовые процентные ставки по вкладам для граждан, соответственно 0,7% и 0,4%. У Иванова есть определенная сумма денег, и он рассчитал, что если он внесет их в первый банк на год, то увеличит свой депозит на 90 тыс. руб. больше, чем если он вложит свои деньги во второй банк. Какой суммой денег он располагает?

A) 500 тыс. руб. **B)** 1 млн. руб. **C)** 12 млн.руб. **D)** 30 млн. руб. **E)** 45 млн. руб.

Решение. Пусть у Ивана есть x денег. Он увеличит свой депозит на $0{,}007x$, если внесет в первый банк и на $0{,}004x$ если внесет во второй банк. Тогда $90\,000 = 0{,}007x - 0{,}004x$, откуда x = 90 000:0,003 = 30 000 000 руб. Ответ: D.

Задача 4. В одном из автосалонов Болгарии легковой автомобиль стоил 20 000 лв. Его цена была дважны снижена на один и тот же процент. После второго снижения цена стала 16 200 лв. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?

A) 9% **B)** 10% **C)** 11%. **D)** 12% **E)** более 12%

Решение. Пусть цена снижалась на p%. Тогда можно составить уравнение: $20000(1-\frac{p}{100})^2 = 16200$. Решая это уравнение, получим: $(1-\frac{p}{100})^2 = \frac{81}{100}$, $1-\frac{p}{100} = \frac{9}{10}$. Откуда $p = 10$.

Ответ: B.

Задача 5. Компания инвестировала по 100 000 евро в два банка, соответственно, на 18-месячный период с простой годовой процентной ставкой 0,6% и на 15-месячный период с простой годовой процентной ставкой 0,8%. Насколько увеличится или уменьшится капитал компании, если она вложит всю сумму в 200 000 евро в первый банк за 18-месячный период?

A) 90 евро **B)** 100 евро **C)** 102 евро **D)** 104 евро **E)** более 104 евро

Решение. За 18 месяцев в первом банке вклад возрастет на $100\,000 \cdot \frac{0{,}6}{100 \cdot 12} \cdot 18$ евро, во втором банке за 15 месяцев вклад возрастет на $100\,000 \cdot \frac{0{,}8}{100 \cdot 12} \cdot 15$ евро. Если все положить в первый банк, то получим прирост $200\,000 \cdot \frac{0{,}6}{100 \cdot 12} \cdot 18$ евро. Найдем модуль разности: $\left|100\,000\left(\frac{0{,}6}{100 \cdot 12} \cdot 18 + \frac{0{,}8}{100 \cdot 12} \cdot 15\right) - 200\,000 \cdot \frac{0{,}6}{100 \cdot 12} \cdot 18\right|$ = $|1000(0{,}9+1) - 2000 \cdot 0{,}9| = 100$ евро. Ответ: B.

Задача 6 (задача с кратким ответом). Одна семья обнаружила, что 60% её ежемесячного заработка уходит на питание, ¼ – уходит на оплату счетов, а оставшиеся 6 тыс. руб. – на дополнительные расходы. Каков годовой доход этой семьи?

Решение. Пусть ежемесячный доход семьи – x (тыс. руб.). Тогда ее расходы могут быть представлены выражением: $0{,}6x + 0{,}25x + 6$. Так как из условия следует, что доходы семьи равны ее расходам, то получаем уравнение: $0{,}6x + 0{,}25x + 6 = x$. Откуда получаем, что $x = 40$ тыс. руб. Тогда годовой доход семьи равен: $12 \cdot 40 = 480$ тыс. руб.

Задача 7 (задача с развернутым ответом). Стоимость организованной экскурсии была разделена на количество учеников класса, и каждый ученик должен был заплатить одинаковую сумму – в целое количество рублей. В последний момент двое учащихся заболели, а другим ученикам пришлось доплатить по 200 рублей. Найдите стоимость групповой экскурсии, если она находится в пределах от 58 до 67 тыс. руб.

Решение. Пусть в классе n учащихся, сумму, которую каждый из них должен внести x руб. Тогда получим уравнение $nx = (n-2)(x+200)$, откуда $x = 100n - 200$ и для стоимости экскурсии получаем: $nx = 100n^2 - 200n$. Если $n = 25$, то $25x = 62500 - 5000 = 57500 < 58000$, не удовлетворяет. Если $n = 27$, то $27x = 72900 - 5400 = 67500 > 67000$, не удовлетворяет. Делаем вывод, что $n = 26$. Стоимость экскурсии $26x = 67600 - 5200 = 62400$ лв. **Ответ. 62,4 тыс. руб.**

3.3. Возрастная группа X – XI классы

Задача 1. Банк разместил сумму в 1 млн. руб. на депозите. Начисление средств происходит по простой годовой процентной ставке в 0,6%. Каков будет размер депозита в конце восьмого месяца?

A) 1,003 млн. руб. **B)** 1,004 млн. руб. **C)** 1,005 млн. руб. **D)** 1,006 млн. руб. **E)** более 1,006 млн. руб.

Решение. 1 Месячная ставка при 0,6% годовых составляет $\frac{0{,}6}{12} = 0{,}05\%$. Тогда через 8 месяцев депозит составит $1 \cdot (1 + 8 \cdot 0{,}0005) = 1{,}004$ млн. руб. Ответ: В.

Задача 2. В Болгарии взнос по страховке КАСКО нового мотоцикла составляет 480 левов на первый год. Во второй год размер страхового взноса сократился на 1%, а в третий год на 2% по сравнению с предыдущим годом. В каждом следующем году страхование снижается на 3% по сравнению с уровнем предыдущего года. Какой из этих интервалов покрывает страховой взнос в шестой год?

A) (390; 400] **B)** (400; 410] **C)** (410; 420] **D)** (420; 430] **E)** (430; 440]

Решение. Страховой взнос на шестой год выражается по формуле: $0{,}99 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}97^3 \cdot 480 \approx 425{,}028$ лев. Ответ: D.

Задача 3. Митко купил дрон за 275 левов с помощью кредитной карты через POS-терминал магазина дронов. Сумма должна быть внесена в банк, который обслуживает кредитную карту, в течение двух месяцев. В конце первого месяца Митко погасил 95 левов. Сколько левов с точностью до 0,01 он должен внести к концу второго месяца, если простая годовая процентная ставка за использование кредитной карты в этом банке составляет 18%?

A) 185, 89лв. **B)** 184,13 лв. **C)** 182,70 лв. **D)** 188,26 лв. **E)** 186,83 лв.

Решение. Если годовая процентная ставка составляет 18%, то месячная: $\frac{18}{12} = 1{,}5\%$. Ставка простая, значит процент начисляется лишь на основное тело кредита. В первый месяц долг вырос на $275 \cdot 0{,}015$. Основное тело кредите Митко уменьшил при этом на 95 левов. Оно стало составлять 180 левов. Во второй месяц на эти деньги был начислен процент: $180 \cdot 0{,}015$ левов. Итого, в конце второго месяца ему нужно внести $275 \cdot 0{,}015 + 180 \cdot 0{,}015 = 186{,}825$ левов, чтобы погасить долг. Ответ: E.

Задача 4. В Банке взят кредит на сумму 7 000 долларов. Срок погашения кредита составляет один год. В конце каждого месяца банк начисляет проценты по простой схеме. С 10 апреля по 10 июня этого года были начислены проценты в сумме 56 долларов. В какой из указанных интервалов входит годовая процентная ставка по кредиту?

A) [0,7%; 0,9%] **B)** [2,7%; 2,9%] **C)** [4,4%; 5,2%] **D)** [6,4%; 6,6%] **E)** [8,7%; 8,9%]

Решение. Обозначим месячную процентную ставку за p%. В указанный период на основное тело кредита начисления процентов происходили 2 раза (прошло 2 месяца). Следовательно, было начислено $2 \cdot \frac{p}{100} \cdot 7000$ долларов долга, что составляет 56 долларов. Получим уравнение: $2 \cdot \frac{p}{100} \cdot 7000$=56. Решая его, приходим к выводу, что $p = 0{,}4\%$. Для получения годовой ставки эту величину нужно умножить на 12. Получим $4{,}8\%$. Ответ: C.

Задача 5. Цена одного товара была повышена три раза на оно и тоже количество процентов. Известо, что начальная цена товара составляла 200 евро, а после второго повышения она стала составлять 338 евро. Найдите цену товара после третьего повышения.

A) 424,80 евро **B)** 436,20 евро **C)** 439,40 евро **D)** 442,60 евро **E)** 446,80 евро

Решение. Обозначим за р% - процент, на который повышалась цена товара каждый раз. Тогда после второго повышения она составила: $200(1+\frac{p}{100})^2 = 338$. Решим полученное уравнение. Получим $p = 30\%$. Тогда цена товара после третьего повышения выражается формулой: $338 \cdot 1{,}3 = 239{,}4$ евро.

Ответ: С.

Задача 6 (задача с кратким ответом)= Г-жа Лесова внесла 40 000 руб. в Банк А и 30 000 руб. в Банк В. Оба банка производят начисления по вкладу по схеме сложных годовых процентов. Процентная ставка Бане В на 0,5% выше, чем процентная ставка в Банке А. Через два года г-жа Лесова сняла деньги и закрыла вклады в обоих банках. Найти процентную ставку для банка А, если общая сумма процентов, начисленных двумя банками по обоим вкладам за два года, составляет 3134,75 руб.

Решение. Обозначим годовой процент по вкладу в банке А за р%. Тогда полученную через два года сумму можно записать выражением: $40000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^2 + 30000\left(1+\frac{p+0{,}5}{100}\right)^2$. Вычтя из нее 70000 руб., получим сумму начисленных за этот период процентов. Тогда p найдется из решения уравнения: $40000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^2 + 30000\left(1+\frac{p+0{,}5}{100}\right)^2 - 70000 = 3134{,}75$.

$$40000 \cdot \frac{2p}{100} + 40000 \cdot \frac{p^2}{10000} + 30000 \cdot \frac{2p+1}{100} + 30000\frac{(p+0{,}5)^2}{10000} = 3134{,}75$$

$$800p + 4p^2 + 600p + 300 + 3p^2 + 3p + 0{,}75 = 3134{,}75$$

$7p^2 + 1403p - 2834 = 0$ Откуда получаем, что $p = 2\%$

Задача 7 (задача с развернутым ответом)= Компания должна выбрать одну из двух инвестиционных стратегий для вложения 50000 евро на трехлетний период. Первый – сделать инвестиции с доходностью 15 000 евро после первого года, 18 000 евро после второго и 22 000 евро после третьего. Полученные таким образом суммы остаются в банке с комплексной годовой процентной ставкой до конца периода. Второй вариант – оставить всю сумму в банке под сложный годовой на трехлетний период. На весь срок годовая процентная ставка составляет 5%. Обоснуйте, какая из двух стратегий является более рентабельной.

Решение. Суммы, накопленные в конце периода для обеих стратегий, будут:

$S_1 = 15000.1{,}05^2 + 18000.1{,}05 + 22000 \approx 57438$ евро.

$S_2 = 50000.1{,}05^3 \approx 57881$ евро.

Откуда следует, что более рентабельна вторая инвестиция

3.4. Студенты и взрослые

Задача 1. Общий доход семьи А из трех человек составляет 3700€ в месяц, а расход – 2800€. Общий доход семьи *B* из четырех человек составляет 4200€, а общие расходы этой семьи – 3020€. Разница между чистым средним доходом семьи *B* и чистым средним доходом семьи *A* за один год составляет:

A) 60 € **B)** 3360 € **C)** 6000 € **D)** –6000 €
E) –60 €

Решение. Чистый ежемесячный доход семьи А: $3700-2800=900$€. Чистый ежемесячный доход семьи В: $4200-3020=1180$€. Тогда средний ежемесячный доход члена семьи А составляет: $900:3=300$€, а семьи В – $1180:4=295$€. В годовой средний доход члена семьи А: $12\cdot 300=3600$€; семьи В: $12\cdot 295=3540$€. Следовательно, разница $3540-3600=-60$€. Ответ: Е.

Задача 2. 2000€ положены на бессрочный депозит в банк под 0,12% на условиях простой годовой ставки. В конце третьего месяца со счета было снято 200€, через четыре месяца на счет положено 500€. Через девять месяцев после открытия депозита счет был закрыт. Полученная сумма (в евро) находится в интервале:

A) [2300; 2301) **B)** [2301; 2302) **C)** [2302; 2303)
D) [2303; 2304) **E)** [2304; 2310)

Решение. Месячная процентная ставка: $\frac{0,12}{12}=0,01\%$. Основная сумма после девяти месяцев составила: $2000-200+500=2300$€. Процентные начисления: $2000\cdot\frac{0,01}{100}\cdot 3=0,60$ (за первые три месяца); $1800\cdot\frac{0,01}{100}\cdot 4=0,72$ (за последующие четыре месяца); $2300\cdot\frac{0,01}{100}\cdot 2=0,46$ (за оставшиеся два месяца). Общие процентные начисления: 1,78€. После закрытия счета сумма составила: 2301,78€.
Ответ: В.

Задача 3. Сумма в 1000 € была положена на годичный депозит в начале года. В начале второго года после начисления процентов на этот счет дополнительно положено еще 1000€. В конце второго года, после начисления процентов сумма составила 2006€. Если начисление происходит по схеме сложных процентов, то годовая процентная ставка находится в интервале:

A) [1%; 3%] **B)** [0,1%; 0,3%] **C)** [0,01%; 0,03%]
D) (0,3%; 0,5%] **E)** (0,03%; 0,05%]

Решение. Обозначим искомую процентную ставку за *p*. Примем для краткости записи за $q=1+\frac{p}{100}$. В конце первого года сумма на счете составит:

$1000 \cdot q$, а в начале второго года было положено еще 1000€ и сумма составила: $1000 \cdot (1+q)$. В конце второго года после начисления процентов сумма стала: $1000 \cdot (1+q) \cdot q = 2006$. Решим полученное квадратное уравнение: $q^2 + q - 2{,}006 = 0$, $q_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9{,}024}}{2}$, но $q > 0$ следовательно, $q = 1{,}002$. Тогда $\dfrac{p}{100} = 0{,}002$ и $p = 0{,}2\%$. Ответ: B.

Задача 4. Цена пары обуви в мае составляла 80€. В начале июня цена увеличилась на p_1%, а в августе уменьшилась на p_2% по сравнению с ценой в июне. После этого цена пары обуви составила 67,20€. Если известно, что $p_1+p_2=50$ при условии, что за этот период никаких других изменений не было, цена на пару обуви в июле находилась в интервале:

A) [85; 87] **B)** (87; 90] **C)** (90; 94] **D)** (94; 99] **E)** (99; 105]

Решение. После повышения цены в июне пара обуви стала стоить: $80 + 80 \cdot \dfrac{p_1}{100}$; А после снижения цены в августе стоимость составила: $80(1+\dfrac{p_1}{100})(1-\dfrac{p_2}{100}) = 67{,}2$; Введен для сокращения записи обозначения: $\dfrac{p_1}{100} = x$, $\dfrac{p_2}{100} = y$, тогда задача сведется к решению системы уравнений: $\begin{cases}(1+x)(1-y) = 0{,}84; \\ x+y = 0{,}5.\end{cases}$ Ее решение приводит нас квадратному уравнению: $x^2 + 1{,}5x - 0{,}34 = 0$, $x_{1/2} = \dfrac{-1{,}5 \pm \sqrt{3{,}61}}{2}$, Так как $x > 0$, получим $x = 0{,}2$, соответственно: $p_1 = 100x = 20\%$. Тогда в июле цена на пару обуви была: $80 \cdot 1{,}2 = 96$ €.

Ответ: D.

Задача 5. На бессрочный депозит внесена сумма K€ под 0,05% простой годовой ставки. В конце каждого месяца со счета снимается по 2€ за обслуживание депозита. В каком интервале должно находится минимальное значение K, при котором по истечение двенадцати месяцев после начисления процентов сумма на депозите будет не меньше K (в евро)?

A) [42000; 45000) **B)** [45000; 48000) **C)** [48000; 51000)
D) [51000; 54000) **E)** [54000; 57000)

Решение. Месячный процент при простой годовой ставке $0{,}05\%$ составляет $0{,}05:12 \approx 0{,}004$. Сумма на депозите по истечении двенадцати месяцев без процентных начислений составляет: $\mathrm{K}-24$, так как каждый месяц снималось по 2€. А процентные начисления между i-тым и $i+1$-м месяцем $(i=0,1,2,\ldots,11)$ могут быть представлены формулой: $\frac{0{,}004}{100}\cdot(K-i\cdot 2)=0{,}00004\cdot(K-2i)$.

Тогда все начисления за 12-ть месяцев составят:

$$0{,}00004\cdot\sum_{i=0}^{11}(K-2i)=0{,}00004\cdot(12K-2\cdot\frac{0+11}{2}\cdot 12)=0{,}00004\cdot(12K-132)$$

и общая сумма в конце 12-ти месяцев $K-24+0{,}00004\cdot(12K-132)$. Так как она должна быть не меньше *K*, то получаем неравенство: $0{,}00004\cdot(12K-132)\geq 24$.

Решая его, приходим к выводу, что $K \geq 50011$ €.

Ответ: C.

Задача 6. Гражданин имеет возможность инвестировать 100 000 € в один из пяти проектов на срок 3 года. Годовой доход от инвестиции в каждый проект представлен в таблице 1.

Таблица 1

Проект	Доход в конце года:		
	Первый год	Второй год	Третий год
I	20 000€	80 000€	9000€
II	10 000€	40 000€	61 000€
III	–	90 000€	20 000€
IV	–	–	112 000€
V	108 000€	–	–

В какой проект ему следует инвестировать свои деньги, если желаемый им минимальный среднегодовой прирост 3%?

Решение. Введем обозначения: $P_0=100000$ – инвестируемая сумма, $q=1+\frac{3}{100}=1{,}03$. Сумма (PV_i), которая получена от инвестиции в i-ый проект за три года, может быть найдена по формуле:

$PV_i=\frac{FV_1^i}{q}+\frac{FV_2^i}{q^2}+\frac{FV_3^i}{q^3}$, где FV_1^i, FV_2^i, FV_3^i – обещанная (будущая) прибыль от инвестиции в i-ый проект за 1, 2 и 3 год соответственно. Тогда чистая прибыль (NPV_i) от инвестиции в i-ый проект может быть найдена: $NPV_i=PV_i-P_0$. Самой выгодной является инвестиция в тот проект, который даст наибольшую чистую прибыль.

$$PV_I = \frac{20000}{1{,}03} + \frac{80000}{1{,}03^2} + \frac{9000}{1{,}03^3} = 103061{,}42€,\ NPV_I = 3061{,}42€$$

$$PV_{II} = \frac{10000}{1{,}03} + \frac{40000}{1{,}03^2} + \frac{61000}{1{,}03^3} = 103236{,}22€,\ NPV_{II} = 3236{,}22€$$

$$PV_{III} = \frac{90000}{1{,}03^2} + \frac{20000}{1{,}03^3} = 103136{,}47€,\ NPV_{III} = 3136{,}47€$$

$$PV_{IV} = \frac{112000}{1{,}03^3} = 102495{,}87€,\ NPV_{IV} = 2495{,}87€$$

$$PV_V = \frac{108000}{1{,}03} = 104854{,}37€,\ NPV_V = 4854{,}37€.$$

Ответ: Максимальная чистая прибыль от инвестиции в пятый проект.

Задача 7 (задача с развернутым ответом). При заключении страхового договора жилье было оценено в 80 000€. Страховой взнос составляет 0,1% в год от оценочной стоимости жилья. Стоимость жилья в начале каждого года снижается на 1% по сравнению с предыдущей. Если в текущем году страховщик должен был возместить ущерб, нанесенный жилью, то на следующий год страховой взнос составляет 0,15% от стоимости жилья. Если в первый и второй год не было страховых выплат, а в третий год были, то каковы:

а) страховой взнос за второй год;

б) стоимость жилья в третий год;

в) разница между страховыми взносами за четвертый и третий год (в евро)?

Решение. Страховой взнос за первый год: $\frac{0{,}1}{100} \cdot 80000 = 80€$.

Оценка жилья во второй год: $0{,}99 \cdot 80000 = 79200€$.

Страховой взнос за второй год: $\frac{0{,}1}{100} \cdot 79200 = 79{,}20€$.

Оценка жилья в третий год: $0{,}99 \cdot 79200 = 78408€$.

Страховой взнос за третий год: $\frac{0{,}1}{100} \cdot 78408 = 78{,}41€$.

Оценка жилья в четвертый год: $0{,}99 \cdot 78408 = 77623{,}92€$.

Страховой взнос за четвертый год: $\frac{0{,}15}{100} \cdot 77623{,}92 = 116{,}44€$.

Следовательно, разница между страховым взносом за четвертый и третий года: 116,44 – 78,41 = 38,03€.
Ответ: а) 79,20€; б) 78408€; в) 38,03€.

Итоги участия России в олимпиаде

Анализ результатов участников олимпиады проводился нами не только в целях выявления призеров и победителей, но также и в целях получения ответов на вопросы о качестве олимпиадных заданий, о наличии или отсутствии положительной динамики в уровне развития финансовой грамотности участников разных возрастных категорий.

Ниже представлено распределение количества набранных участниками баллов в каждой возрастной категории (максимально возможный балл для каждой категории – 30).

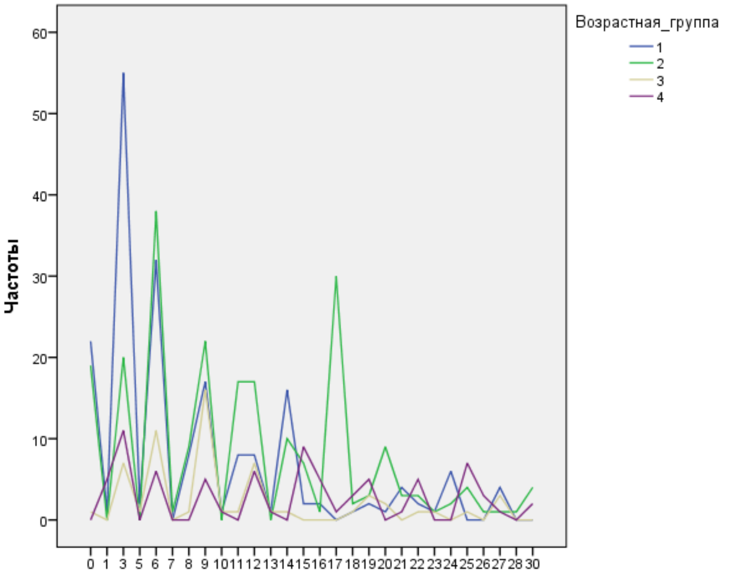


Рисунок 1. Распределение баллов в каждой возрастной категории участников олимпиады

Рисунок показывает, что в возрастных категориях V – VI классы и X – XI классы нет ни одного участника, набравшего максимальное количество баллов. При этом распределение в младшей возрастной категории имеет явно выраженную правостороннюю асимметрию, что говорит о низком уровне финансовой грамотности большинства участников этого возраста. Характер распределений постепенно меняется – становится все более равномерным при повышении возраста участников. Наиболее равномерное распределение наблюдается в возрастной категории студенты и взрослые. По всей видимости, эти изменения обусловлены лишь социальными факторами – повышением финансовой самостоятельности в период взросления. Сделать вывод о значимости мер, направленных на обучение основам финансовой грамотности, такие изменения не позволяют.

Для оценки возможного влияния на результаты относительной трудности задач мы провели анализ успешности их решения участниками олимпиады (рис. 2).

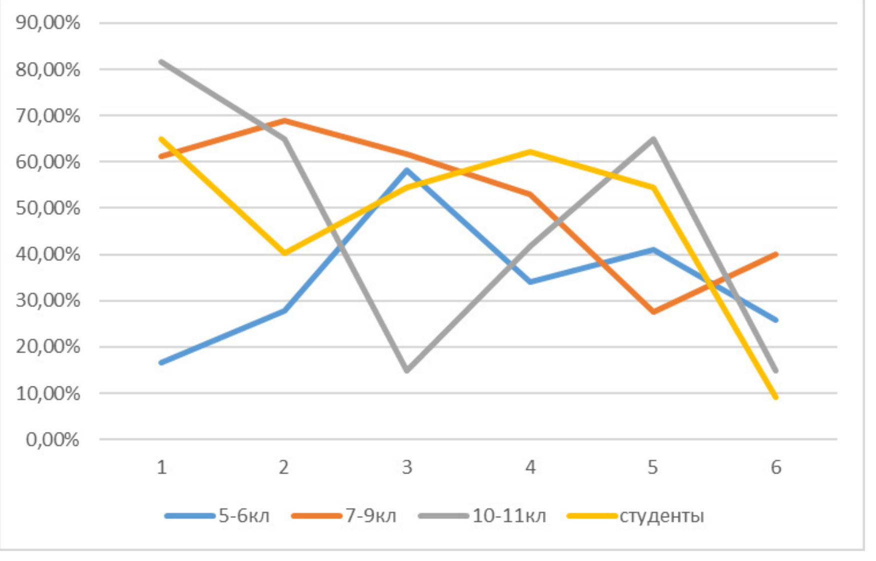


Рисунок 2. Успешность решения задач №№1 – 6

Диаграмма показывает, что в младшей возрастой категории наиболее трудной оказалась задача №1 (решили 16,5% участников). Это объясняется особенностями построения программ по математике в России. Задачи на части и операцию сокращения дробей ученики начинают изучать только в 6 классе, так что многие участники могли не обладать достаточными базовыми знаниями на момент проведения олимпиады. Кроме того задача условнялась необычностью постановки вопрос, который не встречается в школьных учебниках математики. В старшей возрасной категории школьников неожиданно трудной оказалась задача №3 (решили 15% участников). Ее решение требовало специальной подготовки: достаточно глубокого понимания механизмов кредитования, владения понятиями годовая и месячная процентная ставка, простые и сложные проценты. В категории студенты и взрослые непрогозируемая трудность возникла при решении задачи №2 (решили 40% участников). Задачи данного типа традиционно входят в контрольно-измерительными материалы ЕГЭ по математике в России и потому являются предметом специальной подготовки. Возможно, трудности учащихся были вызваны с включением большого количества данных о движениях денежных средств на депозите.

За решение задачи №7 (с развернутым ответом) участники могли получить до 10 баллов. В таблице 2 представлены результаты решения данной задачи по возрастным категориям.

Таблица 2. Результаты решения задачи 7

Возрастная группа	**Задание_7**										
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	7	8	9	10
1	77,3%	1,0%		9,3%			1,0%				11,3%
2	84,5%	1,0%	1,0%	1,0%	1,5%	0,5%	1,5%		2,5%		6,5%
3	70,0%		3,3%		6,7%	1,7%	6,7%	1,7%	1,7%		8,3%
4	27,3%	7,8%		16,9%			5,2%			9,1%	33,8%
В целом по всем группам	71,9%	1,9%	0,8%	6,2%	1,3%	0,4%	2,4%	0,2%	1,1%	1,3%	12,4%

С задачей с развернутым ответом лучше справились участники возрастной категории студенты и взрослые. треть участников решила данную задачу полностью и получила полный балл – 10 баллов. В этой категории данная задача была связана с оценкой страховых взносов и расчетом стоимости жилья и предполагала последовательность действий (расчетов) по годам.

Хуже всего результаты решения задачи с развернутым ответом у участников второй возрастной категории, т.е. учащихся VII – IX классов. Основная часть этих участников не справилась с этой задачей (84,5%). Это объясняется необходимостью привлечения к исследованию математической модели нетрадиционных методов решения уравнений.

Низкие результаты в решении последней задачи (задачи с развернутым ответом) и у участников третьей возрастной категории. У учащихся X – XI классов требовалось знание различных видов годовых ставок.

Подводя итоги проведенному анализу следует подчеркнуть важность организации целенаправленной комплексной подготовки к данной олимпиаде, включающей основы экономических знаний, приемов и методов решения олимпиадных математических задач.

NOTES

1. Strategies for improving financial literacy in the Russian Federation for 2017 – 2023. (2017) Approved by Order of the Government of the Russian Federation of September 25, 2017 №. 2039-r. Retrieved from http://www.garant.ru/ products/ipo/prime/doc/71675558/#ixzz5fog15nVr (in Russian)

2. The project of the Ministry of Finance of the Russian Federation and the World Bank "Promoting the increase of the level of financial literacy of the population and the development of financial education in the Russian Federation" (2011). Retrieved from http://www.minfin.ru/ru/om/fingram/about/targets/index.php#ixzz3o4rlSbZB (in Russian)
3. Financial literacy of Russian students (based on the results of the international program PISA 2012). Repot of the Russian Academy of Education. Center for assessing the quality of education Retrieved from http://iro86.ru/images/documents/RCOKO/Ocenka_kachestva_obrazobaniya/prez/PR_FL_PISA2012.pdf
4. New Achievements of Russian Students. Financial Literacy (based on the results of the international program PISA 2015) https://vashifinancy.ru/upload/ iblock/58c/58cd4b647f3db00fbb58c50b6ab7a952.pdf

REFERENCES

Grozdev, S., Nikolaev, R., Patronova, N. & Shabanova M. (2018). Results of the second international Olympiad in financial and actuarial mathematics for school and university students. *Mathematics and Informatics,* V. 61. № 5, 423 – 443.

BULGARIAN OLYMPIAD ON FINANCIAL AND ACTUARIAL MATHEMATICS IN RUSSIA

Abstract. Improving financial literacy for all segments of the population is a global problem which solving is aim of many international and national projects. It is not possible to find a sufficient solution without drawing attention to mathematical methods for adequate understanding and assessment of financial situation and taking optimal decisions. This is the goal of the Olympiad, established by two Bulgarian universities: the Higher School of Insurance and Finance (VUZF) in Sofia and the Economics University in Varna. Russia participated in the 2018-2019 edition of the Olympiad for the third time.

This paper presents the Olympiad task solutions and gives information about the solution difficulties faced by the students. The authors hope that this information will be helpful for Olympiad questions developers and the participants' coaches.

Keywords: financial literacy; Olympiad; mathematical methods; financial mathematics; actuarial mathematics

✉ **Dr. Rosen Nikolaev, Prof.**
Varna University of Economics
77, Knyaz Boris I Blvd.
Varna, Bulgaria
E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**
University of Finance, Business Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Nina Patronova, Assoc. Prof.**
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
17, Severnaya Dvina Emb.
Arkhangelsk, Russian Federation
E-mail: n.patronova@narfu.ru

✉ **Ms. Bogdana Koneva, PhD student**
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
17, Severnaya Dvina Emb.
Arkhangelsk, Russian Federation
E-mail: b.koneva@narfu.ru

✉ **Prof. Maria Shabanova, DSc.**
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
17, Severnaya Dvina Emb.
Arkhangelsk, Russian Federation
E-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandes.ru