Educational Matters
Научно-методически статии

АСТРОИДА

Борислав Борисов, Деян Димитров,
Николай Нинов, Теодор Христов
Природо-математическая гимназия – Ловеч (Болгария)

Аннотация. В статье представлены результаты работы Болгарской подкоманды – части международной команды учащихся. Эта команда была создана для реализации сетевого исследовательского проекта «Энциклопедия замечательных плоских кривых: пишем сами». Исследование проводилось с использованием программных продуктов GeoGebra, Geometer's Sketchpad и Maple. Для доказательства полученных гипотез использовался метод координат. Для организации сетевого взаимодействия участников использовались облачные сервисы Google.

Ключевые слова: круг; кривые; траектория; астроида

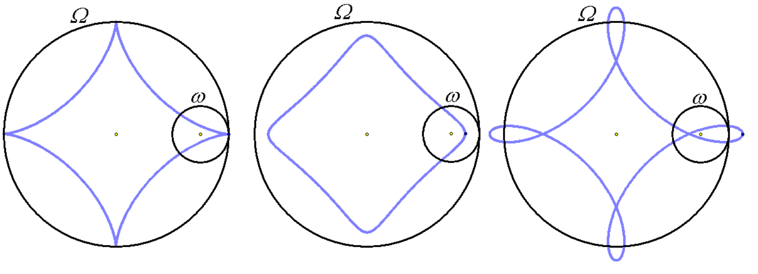
«Энциклопедия замечательных плоских кривых: пишем сами» – это международный сетевой краутсорсинг – проект, который был предложен российскими учеными: доцентом Г. А. Клековкиным и профессорами А. В. Ястребовым и В. Р. Майером в 2017 году. Идея проекта состояла в подготовке силами учащихся разных стран материалов для электронной энциклопедии. Для организации работы был создан сайт «Пишем сами». Отправной точкой послужили статьи-матрицы, подготовленный руководителями проекта. Статьи-матрицы – это серии информационных и исследовательских задач, в результате решения которых должны быть найдены и систематизированы ранее известные в науке и получены новые результаты о какой-либо из замечательных кривых. В конце сентября 2018 года мы приступили к работе над задачами статьи – матрицы «Астроида», подготовленной профессором Г. А. Клековкиным. Здесь мы представляем основные результаты нашей работы.

1. Астроида как гипоциклоида. Кривая **гипоциклоида** получается как траектория движения точки P окружности ω радиуса r, которая катится без скольжения по окружности Ω радиуса R и имеет с ней внутреннее касание. Окружность Ω называют *направляющей окружностью*. Когда выполнено равенство $R = 4r$ гипоциклоида называется *астроида*. В течение XIX в. употреблялись различные названия этой кривой, отражающие ее различные свойства: эволюта эллипса, огибающая семейства отрезков постоянной длины, концы которых скользят по взаимно перпендикулярным прямым (осям координат) и другие. Термин *астроида* ввел австрийский астроном Йозеф фон Литров (1838). Это название составлено из греческих слов αστρον (звезда) и ειδος (вид) и означает „звездообразная”.

2. Астроида и родственные гипоциклоиды. Рассматривается случай, когда точка P находится внутри окружности ω радиуса r, которая катится без скольжения по направляющей окружности Ω центром O и радиуса R и имеет с ней внутреннее касание. В этом случае траектория точки P называется *укороченной гипоциклоидой*.

Возможен и случай когда точка P находится вне окружности ω радиуса r и катится без скольжения по направляющей окружности Ω радиуса R, имея с ней внутреннее касание. В этом случае траектория точки P называется *удлиненной гипоциклоидой*.

Укороченная и удлиненная гипоциклоиды имеют и общее название *гипотрохоиды*.



3. Параметрические уравнения гипоциклоид и астроидой. Введем систему координат Oxy с центром в точке O, которая является центром неподвижной окружности Ω. Тогда общие параметрические уравнения, описывающие движение произвольной точки P находящейся на расстоянии p от центра окружности ω, имеют вид:

$$(1)\ x=(R-r)\cos t+p\cos\frac{R-r}{r}.t,\ y=(R-r)\sin t-p\sin\frac{R-r}{r}.t.$$

Отсюда когда $R=4r$ получаются равенства $x=\frac{3R}{4}\cos t+p\cos 3t$, $y=\frac{3R}{4}\sin t-p\sin 3t$. В случае, когда гипоциклоида является астроидой, имеем $p=r$, поэтому уравнения астроиды имеют вид:

$$x=\frac{3R}{4}\cos t+\frac{R}{4}\cos 3t,\quad y=\frac{3R}{4}\sin t-\frac{R}{4}\sin 3t.$$

Так как справедливы равенства $4\cos^3 t = 3\cos t + \cos 3t$ и $4\sin^3 t = 3\sin t - \sin 3t$, то параметрические уравнения астроиды приводятся к виду:

$$(2) \qquad x = R\cos^3 t,\ y = R\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi .$$

Пользуясь равенством $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ получаем следующее уравнение:

$$(3) \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}} .$$

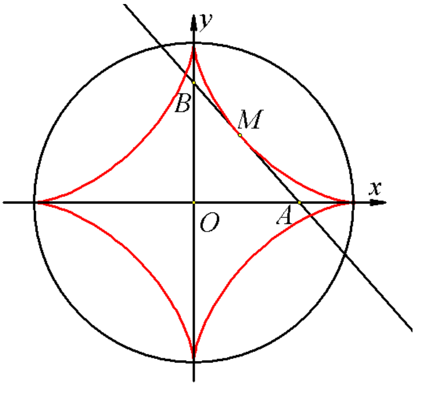
После некоторые преобразования в (3) имеем

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \left(R^{\frac{2}{3}}\right)^3,\ x^3 + y^3 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = R^2,\ x^3 + y^3 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}R^{\frac{2}{3}} = R^2 .$$

Отсюда $\left(x^2 + y^2 - R^2\right)^3 + 27R^2x^2y^2 = 0$. Это означает что астроида является алгебраической кривой шестого порядка.

Последнее уравнение указывает на то, что астроида симметрична относительно центра O и координатных осей.

4. Астроида как решение дифференциального уравнения Клеро. Найдем такую кривую, часть касательной к которой в произвольной ее точке, заключена между осями Ox и Oy системы координат Oxy и имеет постоянную длину R.



Пусть искомая кривая описывается уравнением: $y = f(x)$. Тогда уравнение касательной к этой кривой в произвольной точке $M(x, y)$ имеет вид $Y = y'(X - x) + y$. Отсюда получаются точки пересечения этой прямой с координатными осями $A\left(\dfrac{xy' - y}{y'}, 0\right)$ и $B(0, y - xy')$. Так как треугольник ВОА – прямоугольный, то для него справедливо равенство: $AB^2=\left(\frac{xy'-y}{y'}\right)^2+\left(y-xy'\right)^2=R^2$. Отсюда получается диференциальное уравнение Клеро:

$\left(1+y'^2\right)y^2-2y'\left(1+y'^2\right)xy+y'^2\left(1+y'^2\right)x-R^2y^2=0$, т.е. $y=xy'+\frac{\varepsilon Ry'}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, $\varepsilon=\pm1$.

Положим $y'=p$. Тогда $y=xp+\frac{\varepsilon Rp}{\sqrt{1+p^2}}$. Дифференцуя последнее равенство получаем

$$p'\left[x+\frac{\varepsilon R}{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]=0.$$

Отсюда $p'=y''=0$, $y'=p=C$ и $y=Cx+C_1$. Так получаем общее решение уравнения Клеро $y=Cx+C_1$ и частое решение $x=-\frac{\varepsilon R}{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $y=px+\frac{\varepsilon Rp}{\sqrt{1+p^2}}$. Положив в частом решении $p=C$ получаем $x=-\frac{\varepsilon R}{\left(1+C^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $y=Cx+\frac{\varepsilon RC}{\sqrt{1+C^2}}$. Отсюда и общее решение принимает вид: $Cx+\frac{\varepsilon Rp}{\sqrt{1+p^2}}=Cx+C_1$, $C_1=\frac{\varepsilon Rp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{\varepsilon RC}{\sqrt{1+C^2}}$. Оно приводит нас к равенствам:

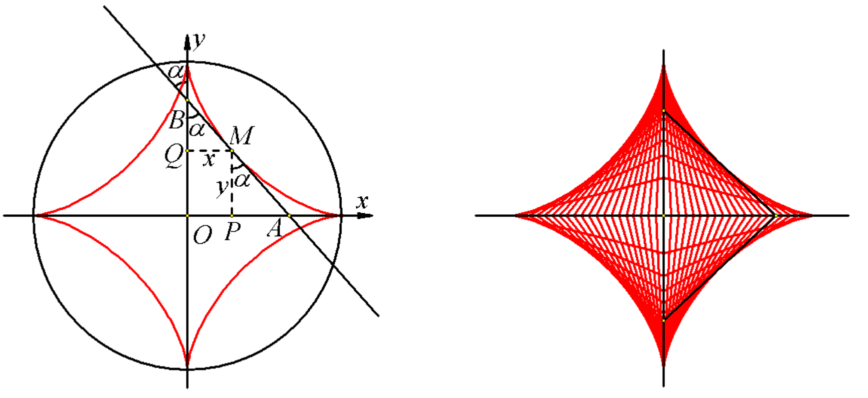
$$x=-\frac{\varepsilon R}{\left(1+C^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ y=\frac{\varepsilon RC^3}{\left(1+C^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

После исключения константы C получаем уравнение $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$, которое совпадает с (3). Следовательно, полученная кривая является астроидой.

5. Огибающая и астроида. Пусть дано уравнение $F\left(x,y,\alpha\right)=0$. Для каждого фиксированного $\alpha\in\left[\alpha_1,\alpha_2\right]$ оно задает уравнение плоской кривой.

Множество всех этих кривых называется семейством линий с одним параметром α. Если существует кривая γ, которая касается каждой кривой данного семейства, а также каждая точка γ является точкой касания некоторой кривой этого семейства, то кривая γ называется *огибающей*. Точки огибающей удовлетворяют уравнениям $F(x,y,\alpha)=0$ и $F'_{\alpha}(x,y,\alpha)=0$.

Пусть сейчас отрезок постоянной длины R скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найдем огибающую семейства прямых, на которых лежат эти отрезки.



Пусть прямая образует с положительной частью оси ординат Oy угол α. Из рисунки видим следующие равенства $MA=\dfrac{MP}{\cos\alpha}=\dfrac{y}{\cos\alpha}$ и $MB=\dfrac{MQ}{\sin\alpha}=\dfrac{x}{\sin\alpha}$. Отсюда, так как $MA+MB=R$, следует, что

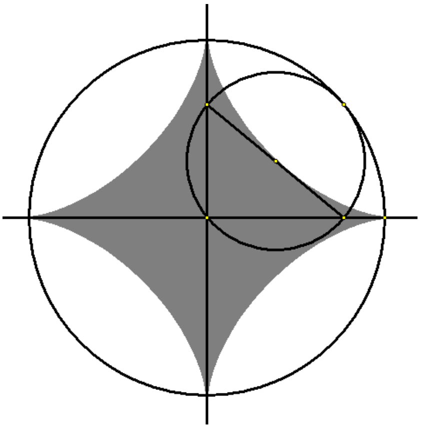
$$F(x,y,\alpha)=\frac{x}{\sin\alpha}+\frac{y}{\cos\alpha}-R=0 \quad \text{и} \quad F'(x,y,\ \ )=\frac{x\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{y\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=0.$$

Из последнего равенства вытекает $tg\alpha=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}$, так как

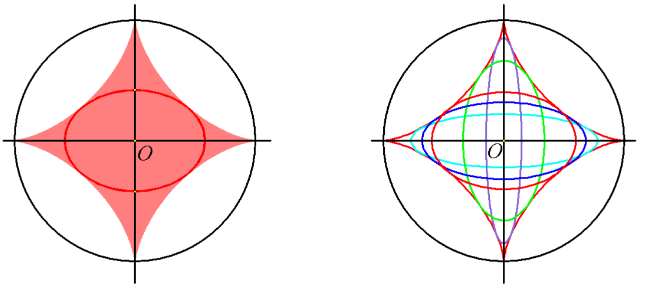
$$\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{y^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}},$$ после за-

мещения в $F(x, y, \alpha) = 0$ получаем $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$, которое является уравнением астроиды (3).

6. Астроида как огибающая диаметра катящейся окружности. Пусть Ω неподвижная окружность радиуса R. Круг с радиусом $\frac{R}{2}$ катится без скольжения по окружности Ω с ее внутренней стороны. В этом случае концы диаметра (расстояние между ними ровно R) подвижного круга движутся по перпендикулярным прямым, поэтому огибающая любого диаметра этого круга является астроидой.



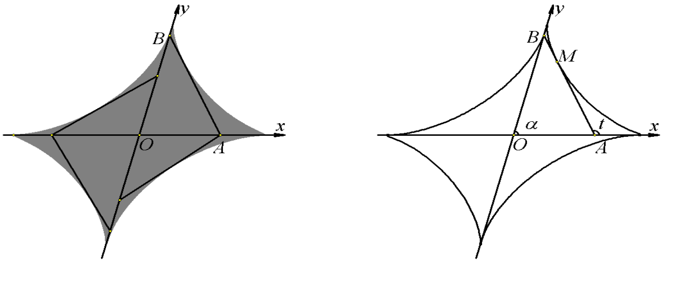
7. Астроида и соосные эллипсы. Рассмотрим огибающую семейства эллипсов ε_a, имеющих общие оси и заданную сумму полуосей. Пусть одна из полуосей имеет длину a, а другая ось – $R - a$, где R константа. Тогда уравнение семейства эллипсов ε_a можно найти из равенств $F(x, y, a) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(R-a)^2} - 1 = 0$ и $F'_a(x, y, a) = -\frac{2x^2}{a^3} + \frac{2y^2}{(R-a)^3} = 0$. Второе уравнение дает $a = \frac{Rx^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$. После замена a в первом уравнении и некоторых преобразований получаем $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$. Вновь получили уравнение астроиды.



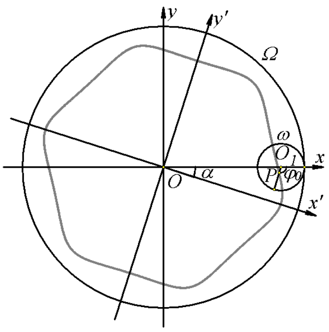
8. Косая астроида. Рассмотрим две прямые x и y, которые пересекаются в точке O под углом α. Будем находит огибающую отрезка AB постоянной длины R, скользящего своими концами по этими прямым. Рассмотрим афинную систему коодинат Oxy и предположим что прямая AB составляет угол t с осью Ox. Из теоремы синусов для треуголника OAB следует $\dfrac{OA}{\sin(t-\alpha)}=\dfrac{OB}{\sin t}=\dfrac{R}{\sin\alpha}$. Отсюда $OA=\dfrac{R\sin(t-\alpha)}{\sin\alpha}$ и $OB=\dfrac{R\sin t}{\sin\alpha}$. Следовательно, уравнение прямой AB в отрезках $\dfrac{x}{OA}+\dfrac{y}{OB}=1$ принимает вид $\dfrac{x}{\sin(t-\alpha)}+\dfrac{y}{\sin t}=\dfrac{R}{\sin\alpha}$. Диференцируя это уравнение по t получаем $\dfrac{x\cos(t-\alpha)}{\sin^2(t-\alpha)}+\dfrac{y\cos t}{\sin^2 t}=0$. Последние два равенства дают параметрическое уравнение кривой называемой *косая астроида:*

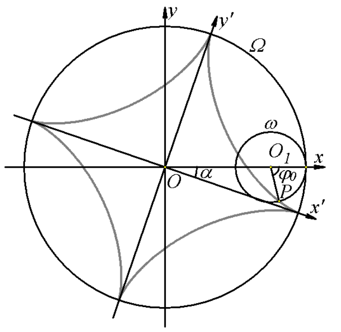
$$x=\frac{R}{\sin^2\alpha}\cos t\sin^2(t-\alpha),\quad y=\frac{R}{\sin^2\alpha}\sin^2 t\cos(t-\alpha).$$

Обычная (прямая) астроида получается при $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.



9. Правильные многоугольники, порожденные астроидой. Пусть точки A_1, A_2, $\cdots$, A_n являются вершинами правильного $n-$ угольника. Они расположены на окружности ω круга радиуса r, который катится без скольжения по неподвижной окружности Ω радиуса $R=4r$ с внутренней ее стороны. Любопытно выяснить, каково взаимное расположение траекторий этих точек. На первый взгляд ясно что эти траектории являются астроидами. Для установления взаимного разположение этих астроид найдем их уравнения. Они получатся из общего уравнения гипоциклоиды.





Вывод формул (1) сделан при условие, что окружность ω начинает свое движение когда точка P находится на оси абсцисс Ox (Borisov & al., 2018). Сейчас рассмотрим и случай в котором точка P имеет некоторое отклонение от Ox. Рассмотрим систему координат Oxy, центром которой является центром O неподвижной окружности Ω и точка P, находящаяся на расстояние p от центра O_1 окружности ω. Пусть центр O_1 окружности ω находится на оси абсцисс Ox и $O_1P^{\to}$ получается после поворот положительное направление оси $O_1x^{\to}$ на угол φ_0. Как и при выводе равенств (1) (Borisov & al., 2018) получается, что общие параметрические уравнения, описывающие движение точки P являются следующими:

$$(4)\quad x=(R-r)\cos t+p\cos\left(\frac{R-r}{r}.t+\varphi_0\right),\ y=(R-r)\sin t-p\sin\left(\frac{R-r}{r}.t+\varphi_0\right).$$

Сделаем замену системы координат Oxy на систему координат $Ox'y'$ через поворот на угол $\alpha=-\frac{r}{R}\varphi_0$ при помощи формул $x=\cos\alpha.x'-\sin\alpha.y'$ и $y=\sin\alpha.x'+\cos\alpha.y'$. Отсюда получаем

$$x'=\cos\left(\frac{r}{R}\varphi_0\right).x-\sin\left(\frac{r}{R}\varphi_0\right).y,\ y'=\sin\left(\frac{r}{R}\varphi_0\right).x+\cos\left(\frac{r}{R}\varphi_0\right).y.$$

После замены в равенствах (4) получаем уравнения гипоциклоиды в системе координат $Ox'y'$:

$$(5)\quad \begin{aligned} x' &= (R-r)\cos\left(t+\frac{r}{R}\varphi_0\right)+p\cos\left(\frac{R-r}{r}.t+\frac{R-r}{R}.\varphi_0\right),\\ y' &= (R-r)\sin\left(t+\frac{r}{R}.\varphi_0\right)-p\sin\left(\frac{R-r}{r}.t+\frac{R-r}{R}.\varphi_0\right). \end{aligned}$$

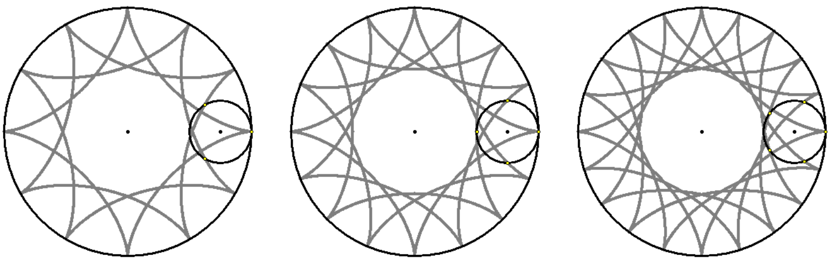
Если подставим в (5) равенства $r=\frac{R}{4}$ и $p=r$, то получим

$$x'=\frac{3R}{4}\cos\left(t+\frac{\varphi_0}{4}\right)+\frac{R}{4}\cos 3\left(t+\frac{\varphi_0}{4}\right),\ y'=\frac{3R}{4}\sin\left(t+\frac{\varphi_0}{4}\right)-\frac{R}{4}\sin 3\left(t+\frac{\varphi_0}{4}\right).$$

Отсюда, как при равенствах (2), находим

$$x'=R\cos^3\left(t+\frac{\varphi_0}{4}\right),\ y'=R\sin^3\left(t+\frac{\varphi_0}{4}\right),\ 0\le t\le 2\pi .$$

Так мы получили параметрические уравнения астроиды ы системе координат $Ox'y'$. Координатные оси $Ox'y'$ проходят через вершины астроиды, поэтому ее назовем *канонической системой координат* для астроиды.



Пусть сейчас вершина A_1 правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, вписанного в окружность ω находится на оси Ox. В этом случае $\varphi_0=0$ и каноническая система координат $Ox'y'$ для астроиды, описанной A_1, совпадает с координатной систем Oxy. Для вершины A_k $(k=1,2,\ldots,n)$ каноническая система координат $Ox'y'$ соответствующей астроиды, описанной A_k $(k=1,2,\ldots,n)$, получается если $\alpha=-\frac{\varphi_0}{4}=-\frac{2(k-1)\pi}{4n}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ между Ox и Ox'. Тогда вершины астроиды описанной точкой A_k повернуты на угол $-\dfrac{2\pi}{4n}$ по отношению к соответствующим вершинам астроиды, описанной вершиной A_{k-1}. Следовательно *вершины астроиды описанные точками* A_1, A_2, $\ldots$, A_n *являются вершинами правильного* $4n-$*угольника вписанного в неподвижную окружность* Ω.

10. Еще одна гипоцилоида, являющаяся астроида. Пусть точка M лежит на окружности ω круга радиуса r, катящегося без скольжения по неподвижной окружности Ω радиуса R с внутренней ее стороны. Мы увидели, что эта гипоциклоида при $R=4r$ является астроидой. Сейчас будем устанавливать, что траектория точки M является астроидой и при $R=\dfrac{4}{3}r$.

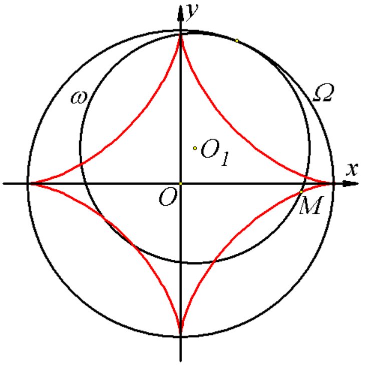
Поставим $r=\dfrac{3R}{4}$ и $p=r$ в равенствах (1) и получим

$$x=\frac{R}{4}\cos t+\frac{3R}{4}\cos\frac{t}{3},\ y=\frac{R}{4}\sin t-\frac{3R}{4}\sin\frac{t}{3}.$$

Отсюда следует, что

$$x=R\cos^3\left(-\frac{t}{3}\right),\ y=R\sin^3\left(-\frac{t}{3}\right).$$

Последние формулы указывают, что траектория точки M, находящаяся на окружности радиуса $r=\dfrac{3R}{4}$, является астроида, которая описывается в посоку обратной астроидой, получающаяся когда M находится на окружности радиуса $r=\dfrac{R}{4}$. Кроме того астроида при $r=\dfrac{3R}{4}$ описывается 3 раза медленее, чем астроидой при $r=\dfrac{R}{4}$.



11. Еще один вид правильных многоугольников, порожденный астроиды. Пусть точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n $(n \geq 3)$ являются вершинами правильного $n-$ угольника и расположены на окружности ω круга радиуса r, который катится без скольжения по неподвижной окружности Ω радиуса $R = \frac{4}{3}r$ с внутренней ее стороны. Было выяснено, что точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n описывают астроиды. Любопытно установить как расположены вершины этих астроид.

Как и прежде рассмотрим систему координат $Ox'y'$, которая получается из Oxy при повороте на $\alpha = -\frac{r}{R}\varphi_0$. При $r = \frac{3}{4}R$ имеем $\alpha = -\frac{3}{4}\varphi_0$. Кроме того при $p = r$ из равенств (5) следует

$$x' = \frac{R}{4}\cos\left(t + \frac{3}{4}\varphi_0\right) + \frac{3R}{4}\cos\left(\frac{1}{3}.t + \frac{1}{4}.\varphi_0\right) = \frac{3R}{4}\cos\left(\frac{1}{3}.t + \frac{1}{4}.\varphi_0\right) + \frac{R}{4}\cos 3\left(\frac{1}{3}.t + \frac{1}{4}.\varphi_0\right),$$

$$y' = \frac{R}{4}\sin\left(t + \frac{3}{4}.\varphi_0\right) - \frac{3R}{4}\sin\left(\frac{1}{3}.t + \frac{1}{4}.\varphi_0\right) = -\left[\frac{3R}{4}\sin\left(\frac{1}{3}.t + \frac{1}{4}.\varphi_0\right) - \frac{R}{4}\sin 3\left(\frac{1}{3}.t + \frac{1}{4}.\varphi_0\right)\right].$$

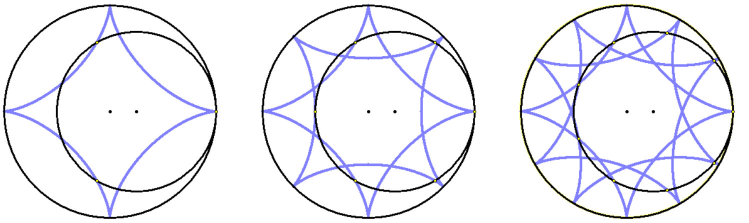
Отсюда, как и в равенствах (2), находим

$$x' = R\cos^3\left(-\frac{1}{3}.t - \frac{1}{4}.\varphi_0\right),\ y' = R\sin^3\left(-\frac{1}{3}.t - \frac{1}{4}.\varphi_0\right),\ 0 \leq t \leq 2\pi .$$

Так мы получили параметрические уравнения астроиды по отношению к системе координат $Ox'y'$. Координатные оси $Ox'y'$ проходят через вершины астроиды, поэтому ее назовем *канонической системой координат* для этой астроиды.

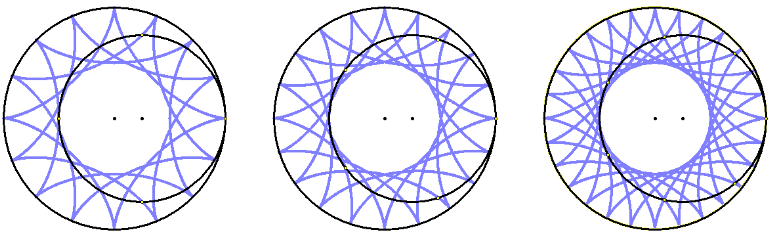
Пусть сейчас вершина A_1 правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, описанной окружности ω находится на оси Ox. В этом случае $\varphi_0 = 0$ и каноническая система координат $Ox'y'$ для астроиды, описанной A_1, совпадает координатной системе Oxy. Для вершины A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ каноническая система координат $Ox'y'$ соответствующая астроиде, описанной A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, получается при угле $\alpha = -\frac{3\varphi_0}{4} = -\frac{3.2(k-1)\pi}{4n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ между Ox и Ox'. Если $n = 3m$, то $\alpha = -\frac{2(k-1)\pi}{4m}$. Тогда вершины астроиды, описанной точкой A_k, повернуты на угол $-\frac{2\pi}{4m}$ по отношению к соответствующим вершинам астроиды, описанной вершиной A_{k-1}. Следовательно *вершины астро-*

иды описанные точками $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ *являются вершинами правильного* $4m-$*угольника вписанного в неподвижную окружность* Ω.



Как следствие из этого результата при $n=3$ получаем, что *вершины правильного треугольника* $A_1,\ A_2$ *и* A_3 *описывают одну и тоже астроиду.* Так как каждый $3m-$угольник составлен m правильными треугольниками, то есть m тройками точек которые описывают m различных астроид.

Если $n=3m+1$ или $n=3m+2$, то *вершины астроиды описанные точками* $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ *являются вершинами правильного* $4n-$*угольника вписанного в неподвижную окружность* Ω.



12. Эволюта астроиды Известно что для точки $M(x,y)$ данной кривой, центр кривизны $C(x_0,y_0)$ имеет следующие координаты:

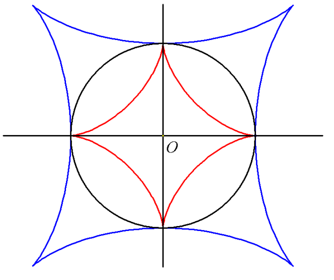
$$x_0 = x-\dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}},\ y_0 = y+\dot{x}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}.$$

Так как $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$, то $\dot{x}=-3R\cos^2 t.\sin t$, $\dot{y}=3R\sin^2 t.\cos t$, $\ddot{x}=3R\cos t\left(2-3\cos^2 t\right)$, $\ddot{y}=3R\sin t\left(2-3\sin^2 t\right)$. Отсюда и из выше указанных формул следует

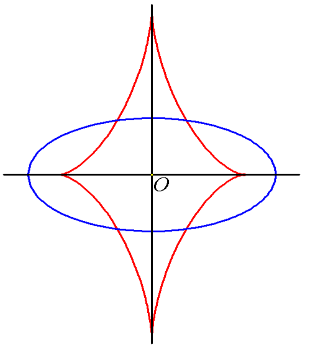
$$x_0 = R\cos t\left(1+2\sin^2 t\right),\ y_0 = R\sin t\left(1+2\cos^2 t\right).$$

Сделаем замену системы координат Oxy на систему координат $Ox'y'$ через поворот на угол $\dfrac{\pi}{4}$ при помощи формул $x=\cos\dfrac{\pi}{4}x'-\sin\dfrac{\pi}{4}y'$

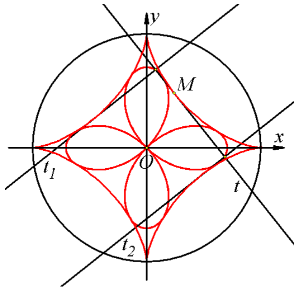
и $y=\sin\frac{\pi}{4}x'+\cos\frac{\pi}{4}y'$, т.е. $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$ $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$. Отсюда $x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ $y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$. Таким образом получаем что $x_0'=2R\cos^3\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$ $y_0'=2R\sin^3\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$. Это параметрические уравнения астроиды по отношению к системе координат $Ox'y'$, которая подобна данной с коэффициентом подобия 2 и повернута относительно неё на угол $45°$.



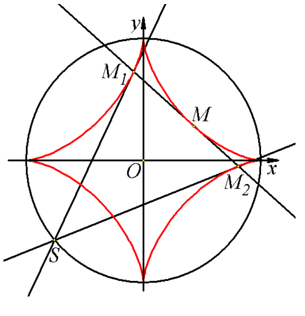
13. Эволюта эллипса. Пусть дан эллипс своими параметрическими уравнениями $x=a\cos t$, $y = b\sin t$ $0\le t\le 2\pi$. Отсюда $\dot{x}=-a\sin t$, $\dot{y}=b\cos t$, $\ddot{x}=-a\cos t$, $\ddot{y}=-b\sin t$. Из формул центра кривизны следует $x_0=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $y_0=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$. Отсюда получаем уравнение $(ax_0)^{\frac{2}{3}}+(by_0)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$. Эта кривая является астроида одна из осей, которой удлинённая.



14. Свойства касательных. Раньше мы установили, что касательную t в точке $M(x.y)$ можно представить равенством $\frac{x}{\sin\alpha}+\frac{y}{\cos\alpha}-R=0$, т.е. она имеет уравнение $\cos\alpha.x+\sin\alpha.y-R\sin\alpha\cos\alpha=0$. Касательные t_1 и t_2, которые перпендикулярны t описываются уравнениями $t_1:\sin\alpha.x-\cos\alpha.y-R\sin\alpha\cos\alpha=0$ и $t_2:\sin\alpha.x-\cos\alpha.y+R\sin\alpha\cos\alpha=0$. Отсюда получается, что точки их пересечения удовлетворяют следующему алгебраическому уравнению $R^2\left(x^2-y^2\right)^2=2\left(x^2+y^2\right)^2$. Это означает, что эти точки описывают алгебраическую кривую четвертой степени. При переходе к полярным координатам получаем уравнение $\rho=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos 2\varphi$. Это значит, что полученная кривая есть четырехлепестковая роза. Таким образом мы пришли к выводу, что *геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых касаются астроиды, – это четырехлепестковая роза.*



Другое свойство касательных следующее: *всякая касательная астроиды пересекает ее в двух точках, касательные в которых пересекаются в точке, лежащей на неподвижной окружности.*



Пусть m_0 прямая, которая касается астроиды в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$, где $x_0=R\cos^3 t_0$ и $y_0=R\sin^3 t_0$. Введем следующие обозначения: $tg\frac{t}{2}=a$ и $tg\frac{t_0}{2}=a_0$. Из формул универсальной подстановки имеем $\sin t=\frac{2a}{1+a^2}$, $\cos t=\frac{1-a^2}{1+a^2}$, $\sin t_0=\frac{2a_0}{1+a_0^2}$ и $\cos t_0=\frac{1-a_0^2}{1+a_0^2}$. Следовательно параметрические уравнения астроиды можно представить следующим образом:

$$x=R\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^3 \text{ и } y=R\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^3.$$

Касательная астроиды в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$ имеет уравнением $y-y_0=\frac{\dot{x}\left(t_0\right)}{\dot{y}\left(t_0\right)}\left(x-x_0\right)$. Так как $\frac{\dot{x}\left(t_0\right)}{\dot{y}\left(t_0\right)}=-\frac{\sin t_0}{\cos t_0}$, то это уравнение принимает вид $\left(a_0a^4+2a_0^2a^3-2a-a_0\right)\left(a-a_0\right)^2=0$. Равенство $\left(a-a_0\right)^2=0$ удовлетворяется точкой $M_0\left(x_0,y_0\right)$. Другие две общие точки $M_1\left(x_1,y_1\right)$ и $M_2\left(x_2,y_2\right)$ касательной m_0 астроиды получаются при нахождении a_1 и a_2 с помощью уравнения $a_0a^4+2a_0^2a^3-2a-a_0=0$. Уравнения касательных m_1 и m_2 в точках $M_1\left(x_1,y_1\right)$ и $M_2\left(x_2,y_2\right)$ соответственно следующие $m_1: y-y_1=\frac{\dot{x}\left(t_1\right)}{\dot{y}\left(t_1\right)}\left(x-x_1\right)$ и $m_2: y-y_2=\frac{\dot{x}\left(t_2\right)}{\dot{y}\left(t_2\right)}\left(x-x_2\right)$. После преобразования получаем

$$m_1: 2a_1\left(1+a_1^2\right)x+\left(1-a_1^4\right)y-2Ra_1\left(1-a_1^2\right)=0,$$

$$m_2: 2a_1\left(1+a_2^2\right)x+\left(1-a_2^4\right)y-2Ra_2\left(1-a_2^2\right)=0.$$

Отсюда общая точка S касательных m_1 и m_2 есть точка

$$S\left(\frac{R\left(1-a_1^2\right)\left(1-a_2^2\right)\left(1-a_1a_2\right)}{\left(1+a_1^2\right)\left(1+a_2^2\right)\left(1+a_1a_2\right)},\frac{4Ra_1a_2\left(a_1+a_2\right)}{\left(1+a_1^2\right)\left(1+a_2^2\right)\left(1+a_1a_2\right)}\right).$$

Если

$$A=a_1^6a_2^4+a_1^4a_2^6+a_1^5a_2^5+a_1^5a_2+a_1a_2^5-2a_1^4a_2^2-2a_1^2a_2^4-4a_1^3a_2^3+a_1^2+a_2^2+a_1a_2\ ,$$

то получаем, что $R^2-OS^2=\dfrac{4R^2A}{\left(1+a_1^2\right)^2\left(1+a_2^2\right)^2\left(1+a_1a_2\right)^2}$. Отсюда следует, что необходимо доказать равенство $A=0$. Пусть $\sigma_1=a_1+a_2$ и $\sigma_2=a_1a_2$. Тогда пользуясь равенствами $a_1^2+a_2^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$ и $a_1^4+a_2^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2$ получаем следующее равенство $A=\sigma_1^2\sigma_2^4-\sigma_2^5+\sigma_1^4\sigma_2-6\sigma_1^2\sigma_2^2+2\sigma_2^3+\sigma_1^2-\sigma_2$.

Сейчас в уравнении $a_0a^4+2a_0^2a^3-2a-a_0=0$ положим $a=x-\dfrac{a_0}{2}$ и получим $16a_0x^4-24a_0^3x^2+16\left(a_0^4-2\right)x-3a_0^5=0$.

Последнее уравнение представим в виде

$$\left[x^2+u_0x+\frac{2a_0u_0^3-3a_0^3u_0-2\left(a_0^4-2\right)}{4a_0u_0}\right]\left[x^2-u_0x+\frac{2a_0u_0^3-3a_0^3u_0+2\left(a_0^4-2\right)}{4a_0u_0}\right]=0\ ,$$

где u_0 является корнем полинома $P_0\left(u\right)=a_0^2u^6-3a_0^4u^4+3a_0^6u^2-\left(a_0^4-2\right)^2$.

Одно решение этого полинома есть $u_0=\sqrt{\dfrac{a_0^3+\sqrt[3]{4a_0\left(1-a_0^4\right)}}{a_0^2}}$. Если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+u_0x+\dfrac{2a_0u_0^3-3a_0^3u_0-2\left(a_0^4-2\right)}{4a_0u_0}=0$ или $x^2-u_0x+\dfrac{2a_0u_0^3-3a_0^3u_0+2\left(a_0^4-2\right)}{4a_0u_0}=0$, из равенств $a_1=x_1-\dfrac{a_0}{2}$ и $a_2=x_2-\dfrac{a_0}{2}$ следуетчто $a_1+a_2=x_1+x_2-a_0$ и $a_1a_2=x_1x_2-\dfrac{a_0}{2}\left(x_1+x_2\right)+\dfrac{a_0^2}{4}$. Когда x_1 и x_2 являются корнями первого уравнения по формулам Виета получаем $\sigma_1=-u_0-a_0$ и $\sigma_2=\dfrac{2u_0^3+2a_0u_0^2+\left(2p+a_0^2\right)u_0-2q}{4u_0}$. Отсюда следует, что $A=\dfrac{P_0\left(u_0\right)P_1\left(u_0\right)}{32a_0^5u_0^5}$, где $P_0\left(u_0\right)=a_0^2u_0^6-3a_0^4u_0^4+3a_0^6u_0^2-\left(a_0^4-2\right)^2$ и

$$P_1\left(u_0\right)=a_0^3u_0^9+7a_0^4u_0^8+20a_0^5u_0^7+2a_0^2\left(14a_0^4+3\right)u_0^6+2a_0^3\left(7a_0^4+8\right)u_0^5-2a_0^4\left(7a_0^4-11\right)u_0^4-$$
$$-4a_0\left(7a_0^8-9a_0^4-3\right)u_0^3-2a_0^2\left(a_0^4-2\right)\left(10a_0^4-3\right)u_0^2-7a_0^3\left(a_0^4-2\right)^2u_0-\left(a_0^4-2\right)^3.$$

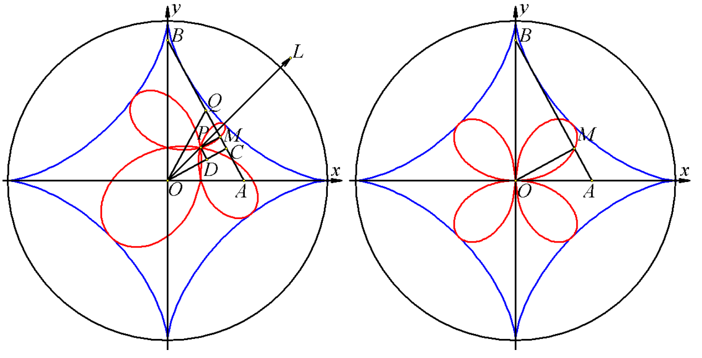
Так как $P_0\left(u_0\right)=0$, то $A=0$.

Когда x_1 и x_2 являются корными второго уравнения по формулами Виета получаем $\sigma_1=u_0-a_0$ и $\sigma_2=\dfrac{2u_0^3-2a_0u_0^2+\left(2p+a_0^2\right)u_0+2q}{4u_0}$. Отсюда следует, что $A=\dfrac{P_0\left(u_0\right)P_2\left(u_0\right)}{32a_0^5u_0^5}$, где

$$P_2\left(u_0\right)=a_0^3u_0^9-7a_0^4u_0^8+20a_0^5u_0^7-2a_0^2\left(14a_0^4+3\right)u_0^6+2a_0^3\left(7a_0^4+8\right)u_0^5+2a_0^4\left(7a_0^4-11\right)u_0^4-$$
$$-4a_0\left(7a_0^8-9a_0^4-3\right)u_0^3+2a_0^2\left(a_0^4-2\right)\left(10a_0^4-3\right)u_0^2-7a_0^3\left(a_0^4-2\right)^2u_0+\left(a_0^4-2\right)^3.$$

Опять от $P_0\left(u_0\right)=0$ следует, что $A=0$.

15. Подэра астроиды относительно точки, лежащей на биссектрисе первого квадранта. *Подэрой* кривой k относительно точки P плоскости кривой k называется *кривая, являющаяся геометрическим местом оснований перпендикуляров, опущенных из точки* P *на касательные к заданной кривой* k.



Пусть P произвольная точка биссектрисы OL первого квадранта координатной системы Oxy и $OP=p$. Уже было показано, что астроиду можно рассматривать как огибающую отрезка $AB = R$, скользящего своими концами по координатным осям. Подэру точки P можно определить как геометрическое место оснований M перпендикуляров, опущенных из P на прямую AB. Пусть Q середина AB, точка C лежит на прямой AB, для которой $OC \perp AB$ и точка D находится на OC и $PD \perp OC$. Рассмотрим полярную координатную систему с полюсом P и полярной осью PL. Введем обозначения $PM = \rho$ и $\sphericalangle LPM = \varphi$. Легко увидеть, что $\sphericalangle QOC = 2\varphi$ и $OC = \frac{R}{2}\cos 2\varphi$. С другой стороны $OC = OD + DE = OD + PM = p\cos\varphi + \rho$. Следовательно $\rho = \frac{R}{2}\cos 2\varphi - p\cos\varphi$. Рассмотрим прямоугольную координатную систему PXY с началом P, по отношению к которой координаты точки M являются X и Y, то $X = \rho\cos\varphi$ и $Y = \rho\sin\varphi$. Отсюда получается следующее уравнение

$$\left(X^2 + Y^2\right)\left(X^2 + Y^2 + pX\right)^2 = \frac{R^2}{4}\left(X^2 - Y^2\right)^2.$$

Таким образом мы установили, что искомая кривая является кривой шестой степени. Она называется «*жуком*». Если $p = 0$, т.е. $P \equiv O$, кривая становится *четырехлепестковой розой*.

16. Длина астроиды и площадь фигуры, ограниченной астроидой. Длину астроиды находим из параметрических уравнений (3) астроиды и интегральной формулы

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3R\sin t.\cos t dt = 2.3R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 3R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t d2t = 6R\cdot$$

Площадь σ фигуры, ограниченной астроидой находим по формуле $\sigma = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx$, где интеграл взят по астроиде. Так получается $\sigma = \frac{3R^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3\pi R^2}{8}$.

17. Площадь поверхности и объем тела вращения, образованного при вращении астроиды вокруг ее оси. Объем тело находим по формуле $V = \pi\int_a^b y^2 dx$, где $a = -R$, $b = R$ и $y^2 = R^2 - 3R^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3R^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2$ (это является следствием формулы (3)). Так получаем $V = \pi\int_{-R}^{R} y^2 dx = 2\pi\int_0^R \left(R^2 - 3R^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3R^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right)dx = \frac{32\pi}{105}R^3$.

Площадь поверхности находим по формуле $S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$,

где $a=-R$, $b=R$, $y=\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ и $y'=-x^{-\frac{1}{3}}\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Так получается

$S=4\pi\int_0^R R^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dx$. В интеграле сделаем замену переменной $t=x^{\frac{2}{3}}$

и получим $S=6\pi R^{\frac{1}{3}}\int_0^{R^{\frac{2}{3}}}\left(R^{\frac{2}{3}}-t\right)^{\frac{3}{2}}dt=-6\pi R^{\frac{1}{3}}.\frac{2}{5}.\left(R^{\frac{2}{3}}-t\right)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^{R^{\frac{2}{3}}}=\frac{12\pi}{5}R^2$.

БЕЛЕЖКИ

1. https://www.sites.google.com/site/pisemsami/

ПРИМЕЧАНИЯ

Борисов, Б., Д. Димитров, И. Стефанов, Н. Нинов & Т. Христов. (2018). Гипоциклоида, *Математика и информатика, 4*, 368 – 377, ISSN 1310-2230.

Аскар, И. & К. Сарсембаева (2018). Эпициклоида, *Математика и информатика, 4*, 360 – 367, ISSN 1310-2230.

Коптева, Д. & К. Горская (2018). Улитка Паскаля, *Математика и информатика, 5*, 465 – 480, ISSN 1310-2230.

Александрова, Н. (2008). *История математических терминов, понятий, обозначений*. Словарь-справочник. Москва: ЛКИ.

Александрова, Н. (1984). *Математически термини*. София: Наука и изкуство.

Берман, Г. (1980). *Циклоида*. Москва: Наука.

Болтянский, В. Г. (1961). *Огибающая*. Москва: Гос. из-во физико-математической литературы.

Васильев, Н. Б. & В. Л. Гутенмахер. (2006). *Прямые и кривые*. Москва: МЦНМО.

Норден, А. П. (1958). *Краткий курс дифференциальной геометрии*. Москва: Гос. из-во физико-математической литературы.

Гелерт, В., Х. Кестнер & З. Нойбер. (1983). *Математически енциклопедичен речник*. София: Наука и изкуство.

Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.

Гроздев, С., В., Ненков. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.

Маркушевич, А. (1952). *Замечательные кривы*. Москва: Гос. изд-во теоретико-технической литературы.

Савелов, А. (1960). *Плоские кривы*. Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы.

Сергеева, Т., М. Шабанова, С. Гроздев. (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.

Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков. (2016). Первый международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 6*, 567 – 571. (ISSN 1310-2230).

Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков. (2017). Второй международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 5*, 457 – 465. (ISSN 1310-2230).

Атамуратова, Р., М. Алферов, М. Белорукова, В. Ненков, В. Майер, Г. Клековкин, Р. Овчинникова, М. Шабанова & А. Ястребов. (2018). „Энциклопедия замечательных плоских кривых” – международный сетевой исследовательскии проект в рамках MITE, *Математика и информатика, 6*, 566 – 584, ISSN 1310-2230.

Гроздев, С., В. Ненков & Св. Дойчев (2012). *За високи постижения в математиката (в помощ на учителя)* (2012). София: фондация „Миню Балкански“ & фондация „Америка за България“, ISBN 978-954-92830-3-7.

Гроздев, С., В. Ненков & И. Шаркова (2015). *В помощ на учителя по математика. Сборник от методически разработки.* София: фондация „Миню Балкански“ & фондация „Америка за България“, ISBN 978-954-92830-5-1.

Генов, Г., С. Миховски &Т. Моллов. (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуство.

Златанов, Б., С. Караибрямов & Б. Царева. (2012). Вертикална интеграция на обучението в средното училище и университета чрез проективни методи в динамична среда. *Математика плюс, 1*, 2012, 50 – 60, ISSN 0861-8321.

Георгиева, М. & С. Гроздев. (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.). София: Изток-Запад, 987-619-152-869-1, 327 стр.

Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: МГУ.
Станилов, Г. (1979). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.
Мартинов, Н. (1989). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.
Станилов, Г. (1988). *Диференциална геометрия*. София: Наука и изкуство.

REFERENCES

Borisov, B., D. Dimitrov, I. Stefanov & T. Hristov (2018). Hypocycloid, *Mathematics and Informatics, 4*, 368 – 377, ISSN 1310-2230.
Askar, I. & K. Sarsembayeva (2018). Epicycloid, *Mathematics and Informatics, 4*, 360 – 367, ISSN 1310-2230.
Kopteva, D. & K. Gorskaya (2018). Pascal's limacon, *Mathematics and Informatics, 5*, 465 – 480, ISSN 1310-2230.
Aleksandrova, N. (2008). *History of mathematical terminology, notions and notations. Vacabulary-Handbook*. Moscow: LKI.
Aleksandrova, N. (1984). *Mathematical terminology*. Sofia: Nauka i izkustvo.
Berman, G. (1980). *Cycloid*. Moscow: Nauka.
Boltyanskii, V. (1961). *Envelope*. Moscow: State Printing House for Physics-Mathematics literature.
Vasilyev, N. & V. Gutenmaher. (2006). *Lines and curves*. Moscow: MCNMO.
Norden, A. (1958). *A concise course on Differential Geometry*. Moscow: State Printing House for Physics-Mathematics literature.
Gelert, V., H. Kestner & Z. Noiber. (1983). *Mathematical encyclopedia vocabulary*. София: Sofia: Nauka i Izkustvo.
Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *About the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes.
Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Three notable points on the median of a triangle*. Sofia: Archimedes 2000.
Markushevich, A. (1952). *Notable curves*. (1952). Moscow: State Printing House for theoretical-technical literature.
Sevelov, A. (1960). *Plane curves*. Moscow: State Printing House for Physics-mathematics literature.
Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundations of Dynamic geometry*. Moscow: ASOU.
Grozdev, S. & V. Nenkov. (2017). Gaining new knowledge by computer experiments. *Journal of Educational Sciences & Psychology, vol. VII (LXIX), No 1B*. Special Issue – International Conference Education

and Psychology Challenges – Teachers for the knowledge society – 4th edition, May, 122 – 125, ISSN 2247-6377. (ISSN online version 2247-8558).

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics*: The Bulgaria Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).

Shabanova, M., R. Atamuratova. M. Belorykova, V. Nenkov & M. Pavlova. (2016). The game "Geometry scrabble in cloud" an organizational form of the international student research groups. *Mathematics and education in mathematics, 45*, 223 – 228. (ISSN 1313-3330).

Shabanova, M., M. Belorykova, R. Atamuratova & V. Nenkov (2016). First International net research project for students in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 6*, 567 – 571. (ISSN 1310-2230).

Shabanova, M., M. Belorykova, R. Atamuratova & V. Nenkov (2017). Second International net research project for students in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 5*, 457 – 465. (ISSN 1310-2230).

Atamuratova, R. M. Alferov, M. Belorykova, V. Nenkov, B. Mayer, G. Klekovkin, R. Ovchinnikova, M. Shabanova & A. Yastrebov (2018). "Encyclopedia of notable plane figures" – International net research project in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 6*, 566 – 584, ISSN 1310-2230.

Grozdev, S., V. Nenkov & S. Doichev (2012). *For high achievements in Mathematics (for teacher's support)*. Sofia: "Foundation Minu Balkanski" & "Foundation America for Bulgaria", ISBN 978-954-92830-3-7.

Grozdev, S., V. Nenkov & I. Sharkova. (2015). *For math teacher's support. Collection of methodological elaborations.* Sofia: "Foundation Minu Balkanski" & "Foundation America for Bulgaria", ISBN 978-954-92830-5-1.

Genov, G., S. Mihovski & T. Molov (1991). *Algebra with number theory.* Sofia: Nauka i Izkustvo.

Karaibryamov, S., B. Tsareva & B. Zlatanov (2013). Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology,* ***Volume 7,*** *Number 1*, 22 – 51, ISSN 1933-2823.

Zlatanov, B., S. Karaibryamov & B. Tsareva (2012). Vertical integration of the secondary school and university education by projective in dynamic environment. *MMathematics Plus, 1*, 2012, 50 – 60, ISSN 0861-8321.

Zlatanov, B. (2013). Some Properties of Reflection of Quadrangle about Point, *Annals. Computer Science Series*, 11, (1), 79 – 91.

Zlatanov, B. (2014). An Etude on one Sharygin's Problem, *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 3, (2), 50 – 61.

Georgieva, M. & S. Grozdev. (2016). *Morfodinamikata za razvitieto na noosfernia intelekt*. (4th ed.), Sofia: Publ. Hous "Iztok-Zapad", ISBN 987-619-152-869-1, 327 pages.
Staribratov, I. & R. Todorova. (2019). One Generalization of the Geometric Problems from 19th Junior Balkan Mathematical Olympiad, *Mathematics and Informatics, 2*, 203 – 2015, ISSN 1310-2230.
Modenov, P. (1969). *Analytical Geometry*. Moscow: MGU.
Stanilov, G. (1979). *Analytical Geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo.
Martinov, N. (1989). *Analytical Geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo.]
Stanilov, G. (1988). *Differential Geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo.

ASTROID

Abstract. The paper presents the results of the Bulgarian sub-team – a part of an international team of secondary students. The ream was formed for the realization of the net research project "Encyclopedia of Notable Plane Figures: We Work by Ourselves". The research was organized by using the software products GeoGebra, Geometer's Sketchpad and Maple. The coordinate method was applied to prove the derived hypotheses. The cloud service Google was used in the organization of the net interaction among the participants.

Keywords: circle; curves; trajectory; astroid

☒**Mr. Borislav Borisov, Mr. Deyan Dimitrov,**
Mr. Nikolay Ninov, Mr. Teodor Hristov
Mathematics High School – Lovech
1, Akad. Urumov St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: borislavst27@gmail.com
E-mail: dido3637@gmail.com
E-mail: nikininov1@gmail.com
E-mail: tedo3637@abv.bg