

АНАЛИЗ НА ЗАДАЧИТЕ И ПРЕДСТАВЯНЕТО НА УЧЕНИЦИТЕ ОТ XI И XII КЛАС НА ОБЛАСТНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР КЪРДЖАЛИ'2015

Росен Николаев, Йордан Петков
Икономически университет – Варна

Резюме. В настоящата статия се разглеждат задачите за XI и XII клас от проведения на 14.11.2015 г. Областен математически турнир в Кърджали. Предлагат се методически решения на задачите. На база на постигнатите резултати се анализира нивото на подготовка на участниците за състезания от подобен тип.

Keywords: education, mathematics competition

Целта на настоящата статия е да се представят условията на задачите за XI и XII клас от проведения на 14.11.2015 г. в Кърджали Петнадесети областен математически турнир за ученици от III до XII клас, възможните подходи за тяхното решаване и на база на получените резултати да се анализира нивото на подготовка на участниците за състезания от подобен тип.

От XI клас в състезанието взеха участие 66 ученици, в това число 31 от Кърджали, 13 от Смолян, 9 от Хасково, 4 от Ардино, 3 от Димитровград, 2 от Крумовград, 2 от с. Чорбаджийско и по 1 от Свиленград и с. Черноочене. Състезателите от XII клас бяха 78, от които 34 от Кърджали, 25 от Хасково, 15 от Смолян, 3 от Крумовград и 1 от с. Чорбаджийско.

Съгласно регламента броят на задачите в темите за всички класове е седем, като в първите шест трябва да се избере един верен отговор от общо пет, а последната задача е от отворен тип, като е необходимо не само да се отговори, но и да се направи обосновка на получения резултат. Времето за работа е 120 минути. Максималният брой точки, които могат да съберат участниците, е 23, като верен отговор на задачи от 1 до 6 се оценява с по 3 точки, а на седма задача могат да се получат от 1 до 5 точки.

Важна особеност на турнира е, че най-добре представилите се ученици от XI и XII клас получават разнообразни предимства при кандидат-

стване във ФМИ на ПУ „Паисий Хилендарски“, ВУЗФ и Икономическия университет – Варна.

Темата за XI клас включваше следните задачи.

Задача 1. Да се намерят корените на уравнението $x + \sqrt{16 - x^2} = 2$.

- А) $1 - \sqrt{7}$ и $1 + \sqrt{7}$ В) $1 + \sqrt{7}$ С) 2 Д) 4 Е) $1 - \sqrt{7}$

Задача 2. Да се определят стойностите на реалния параметър a , за които сумата от корените на уравнението $x^3 - ax^2 + ax = 0$ е неположителна.

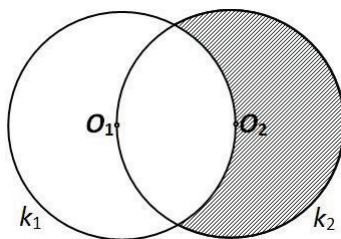
- А) $a \in (-\infty, 4]$ В) $a \in (4, +\infty)$ С) $a \in (-\infty, 4)$ Д) $a \in [4, +\infty)$ Е) $a \in (4, 10)$

Задача 3. За кои стойности на реалния параметър a уравнението

$$\frac{1 + 2^{-x^2}}{1 - 2^{-x^2}} = a \text{ има решение?}$$

- А) $a \in (1, +\infty)$ В) $a \in (0, 1)$ С) $a = 1$
 Д) $a = 0$ Е) друг отговор

Задача 4. Дадени са две еднакви окръжности $k_1(O_1, r = 3 \text{ см})$ и $k_2(O_2, r = 3 \text{ см})$, като центърът на всяка от тях лежи върху другата. Да се намери лицето на заштрихованата част?



- А) $3\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ В) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ С) $3\left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
 Д) 3π Е) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

Задача 5. Да се намери височината на трапец с основи $\sqrt{20}$ см и 3 см и бедра 5 см и 6 см.

- А) 4 В) 5 С) $\frac{71 + 12\sqrt{5}}{4}$

D) $\sqrt{20} - 3$ см

E) такъв трапец не съществува

Задача 6. Куб с ръб 2015 е съставен от единични кубчета. Премахнати са всички кубчета, през които преминават телесните диагонали на куба. Тогава броят на останалите единични кубчета се дели на:

A) 2017

B) 2016

C) 2015

D) 2014

E) 2013

Задача 7. Да се намери най-малкото естествено число n , за което числото $2018^3 - 6054n$ се дели на 2015.

Темата за XII клас включваше следните задачи.

Задача 1. Ако x и y са положителни реални числа и $2014^x \cdot 2016^y = 2015^{x+y}$, отношението $\frac{x}{y}$ е:

A) равно на 1

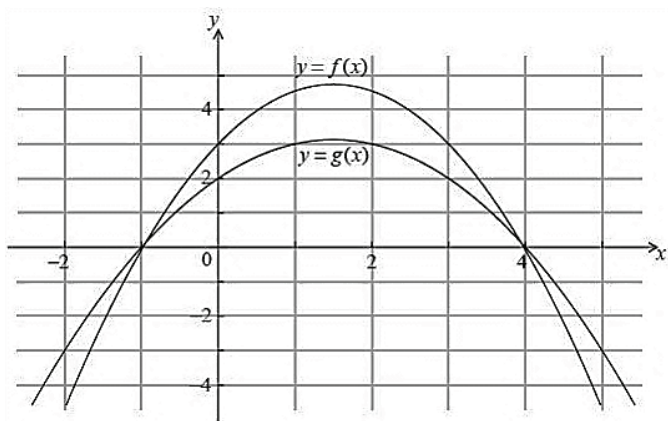
B) равно на 2

C) число между 0 и 1

D) число между 1 и 2

E) друг отговор

Задача 2. На фигурата са показани графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$.



Да се намерят всички стойности на x , за които $f(g(x)) = 3$.

A) $-1; 1; 2; 4$

B) $0; 3$

C) $1; 2$

D) $-2; 5$

E) $1; 2; 3$

Задача 3. Ако $3f(x) - 2f(2015 - x) = x + 3$, то $f(6025)$ е равно на:

A) 2000

B) 2014

C) 2015

D) 2016

E) 2020

Задача 4. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с катет $BC=5$. Ъглополовящата на ъгъла при върха срещу другия катет AC пресича AC в точка D . Да се намери разстоянието от върха A до правата BD , ако разстоянието от върха C до правата BD е 3.¹

- А) $5/3$ В) $27/5$ С) $75/7$ D) $97/9$ Е) $2015/183$

Задача 5. Дадена сума е поставена на влог за $m+n$ дни, като първите m дни се олихвява с $p\%$ проста дневна лихва, а следващите n дни – с $(8k^2 + 18k - 5) \cdot p\%$ проста дневна лихва, като $k \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. При тези условия нарасналата сума е равна на сумата, която би се натрупала, ако през целия период на влога лихвата е $(4k^2 + 9k - 2) \cdot p\%$ (проста дневна). Да се намери отношението $\frac{m}{n}$.

- А) 0 В) 1 С) 2 D) 3 Е) не може да се определи.

Задача 6. Трима студенти се подготвят за изпит, като всеки от тях е научил по 5 въпроса от конспект, състоящ се от общо 20 въпроса. На изпита се изтегля по случаен начин един въпрос. Каква е вероятността студентите да положат успешно изпита, при условие че работят заедно, но нямат предварителна уговорка да учат различни въпроси?

- А) $\frac{3}{4}$ В) $\frac{63}{64}$ С) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{37}{64}$ Е) $\frac{1}{20}$

Задача 7. Точките M , N и P са среди съответно на ръбовете AB , BC и C_1D_1 на куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Да се пресметне $\cos \angle MNP$.

Възможни подходи за решаване на задачите

Ще представим възможни подходи за решаване на задачите от двете теми, без да претендираме, че те са единствени.

Решения на задачите от темата за XI клас.

Задача 1. Отг. Е). ДС: $16 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4, 4]$. Прехвърляме x вдясно на равенството и повдигаме двете страни на квадрат, при условие че $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4, 2]$:

$$\sqrt{16 - x^2} = 2 - x, 16 - x^2 = 4 - 4x + x^2,$$

$$x^2 - 2x - 6 = 0, x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Коренът $x_1 = 1 - \sqrt{7}$ принадлежи на множеството от допустими стойности, докато другият корен $x_2 = 1 + \sqrt{7}$ не принадлежи на това множество.

Задача 2. Отг. С). Уравнението $x^3 - ax^2 + ax = 0$ е еквивалентно на $x(x^2 - ax + a) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \cup x^2 - ax + a = 0$, т.е. $x_1 = 0$ е негов корен. Ако $a = 0$, даденото уравнение има вида $x^3 = 0$, с корени $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, сумата на които е неположителна. Ако $a \neq 0$, са възможни два случая.

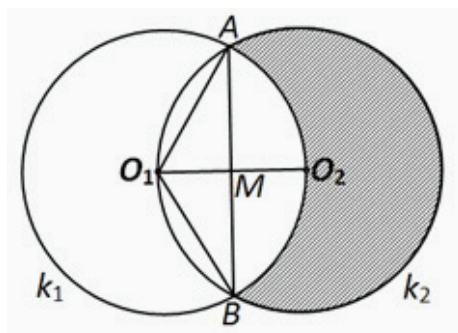
Случай 1. Дискриминантата на квадратното уравнение $x^2 - ax + a = 0$ е неотрицателна: $D = a^2 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$. Уравнението има два реални корена x_2 и x_3 , за които от формулите на Виет е изпълнено $x_2 + x_3 = a$. Тогава даденото уравнение има три корена: $x_1 = 0$, x_2 и x_3 , като трябва $x_1 + x_2 + x_3 = a \leq 0$. Така получаваме, че $a \in (-\infty, 0)$.

Случай 2. Дискриминантата на квадратното уравнение $x^2 - ax + a = 0$ е отрицателна: $D = a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 4)$. То няма реални корени, а даденото уравнение има единствен корен $x_1 = 0$, който е неположителен.

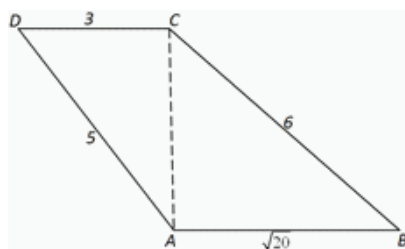
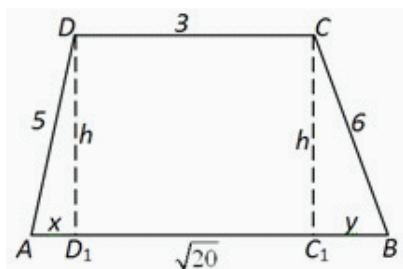
Окончателно получаваме, че $a \in (-\infty, 4)$.

Задача 3. Отг. А). Полагаме $y = 2^{-x^2}$, като $0 < y \leq 1$. Равенството $\frac{1+y}{1-y} = a$ е дефинирано при $y \neq 1$. От него изразяваме $y = \frac{a-1}{a+1}$. Следователно $0 < \frac{a-1}{a+1} < 1$, откъдето намираме $a \in (1, +\infty)$.

Задача 4. Отг. С). Лицата на двата кръга са равни на 9π см². Нека M е пресечната точка на общата хорда AB и на централата O_1O_2 . Тогава $O_1M = MO_2 = \frac{O_1O_2}{2} = \frac{3}{2}$. В правоъгълния $\triangle O_1MA$ ($\angle O_1MA = 90^\circ$) имаме $O_1M = \frac{O_1A}{2} \Rightarrow \angle O_1AM = 30^\circ$ и $\angle MO_1A = 60^\circ$. Тогава $\angle AO_1B = 2 \cdot \angle MO_1A = 120^\circ$. Лицето S_1 на сегмента AO_2B е равно разликата между лицето на сектора O_1AO_2B и лицето на $\triangle ABO_1$, т.е. $\frac{120^\circ}{360^\circ} 9\pi - \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \sin 120^\circ = 3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}$ см². Тогава търсеното лице на заштрихованата част е равно на разликата между лицето на кръга с граница окръжността k_2 и $2S_1$, т.е. на $9\pi - 2 \left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \right) = 3 \left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ см².



Задача 5. Отг. А). Нека $CC_1 = DD_1 = h$ са височини в трапеца, $AD_1 = x$ и $BC_1 = y$. От правоъгълните триъгълници AD_1D и BC_1C имаме $h^2 = 5^2 - x^2 = 6^2 - y^2$. Освен това $D_1C_1 = 3 = \sqrt{20} - x - y$. Достигае до системата
$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 11 \\ x + y = \sqrt{20} - 3 \end{cases}$$
, от която намираме $y = \sqrt{20}$. Тогава $h^2 = 6^2 - (\sqrt{20})^2 = 16$ или $h = 4$ см.



Забележка. От намерената стойност на $BC_1 = y = \sqrt{20}$ следва, че $C_1 \equiv A$ (вж. втория чертеж).

Задача 6. Отг. D). Кубът съдържа 2015^3 единични кубчета. Всеки от четирите му телесни диагонала преминава през 2015 кубчета, като едно от тях е общо за всички. Следователно броят на премахнатите кубчета е $4 \cdot 2015 - 3$, а броят на останалите кубчета е $A = 2015^3 - (4 \cdot 2015 - 3) = 2015^3 - 4 \cdot 2015 + 3$. Преобразуваме A по следния начин:

$$\begin{aligned} A &= 2015^3 - 3 \cdot 2015 - 2015 + 3 = 2015(2015^2 - 1) - 3(2015 - 1) = \\ &= 2015 \cdot 2016 \cdot 2014 - 3 \cdot 2014 = 2014 \cdot (2015 \cdot 2016 - 3). \end{aligned}$$

Очевидно изразът в скобите не се дели на 2015 и 2016. Лесно може да се докаже, че той не се дели на 2013 и 2017. Наистина

$$2015 \cdot 2016 - 3 = (2013 + 2) \cdot (2013 + 3) - 3 = 2013^2 + 5 \cdot 2013 + 3,$$

което не се дели на 2013, и

$$2015 \cdot 2016 - 3 = (2017 - 2) \cdot (2017 - 1) - 3 = 2017^2 - 3 \cdot 2017 - 1,$$

което не се дели на 2017.

Следователно A се дели на 2014 и на никое друго число от посочените.

Задача 7. Нека n е такова, че $2018^3 - 6054n$ се дели на 2015. Преобразуваме израза по следния начин:

$$\begin{aligned} 2018^3 - 6054n &= (2015 + 3)^3 - 3 \cdot (2015 + 3)n = \\ &= 2015^3 + 3 \cdot 2015^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2015 \cdot 3^2 + 27 - 3 \cdot 2015n - 9n. \end{aligned}$$

Първото, второто, третото и петото събираемо се делят на 2015, следователно трябва и $27 - 9n$ да се дели на 2015. Най-малкото естествено число, за което това е изпълнено, е $n=3$.

Решения на задачите от темата за XII клас.

Задача 1. Отг. С). Преобразуваме израза:

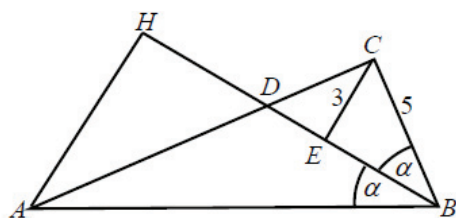
$$2014^x \cdot 2016^y = 2015^{x+y} \Leftrightarrow \left(\frac{2016}{2015} \right)^y = \left(\frac{2015}{2014} \right)^x.$$

$$\text{Тъй като } 1 < \frac{2016}{2015} < \frac{2015}{2014}, \text{ то } 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{y} < 1.$$

Задача 2. Отг. А) От фигура 1 се вижда, че $f(g(x)) = 3 \Leftrightarrow g(x) = 0$ или $g(x) = 3$, откъдето следва, че $x = \{-1; 1; 2; 4\}$.

Задача 3. Отг. В). Ако положим $x = 6025$, то $3f(6025) - 2f(-4010) = 602$ (*). Ако положим $x = -4010$, то $3f(-4010) - 2f(6025) = -4007$ (**). Като решим системата от (*) и (**), получаваме $f(6025) = 2014$.

Задача 4. Отг. С). Нека H и E са петите на проекциите върху правата BD съответно на върховете A и C , а $\angle ABC = 2\alpha$. Да забележим, че $\triangle BCE$ е Питагоров, откъдето следва, че $BE=4$. Освен това правоъгълните триъгълници BAH и BCE са подобни, като отгук $\frac{AH}{3} = \frac{AB}{5}$. Тъй като $AH = \frac{3}{5} AB$, зада-



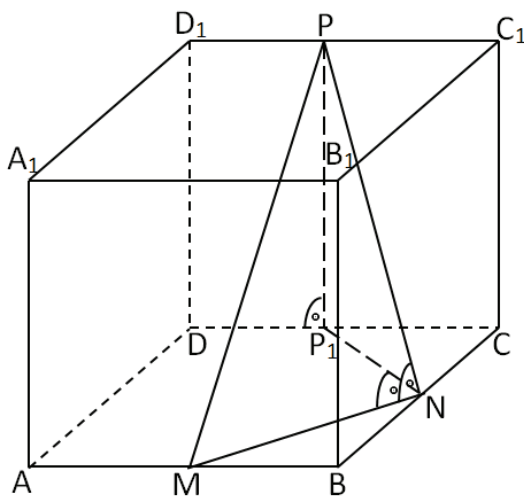
Задача 5.Отг. В). Нека вложената сума е K лв. За m дни при $p\%$ проста дневна лихва нарастването на сумата е $K\left(1+m\cdot\frac{p}{100}\right)$, а за следващите n дни при $(8k^2+18k-5)\cdot p\%$ проста дневна лихва нарастването е $K\left(1+n\cdot\frac{(8k^2+18k-5)\cdot p}{100}\right)$. Натрупаната сума за $m+n$ дни при $(4k^2+9k-2)\cdot p\%$ проста дневна лихва е $K\left(1+(m+n)\cdot\frac{(4k^2+9k-2)\cdot p}{100}\right)$.

По условие $K\left(1+m.\frac{p}{100}\right)+K\left(1+n.\frac{(8k^2+18k-5).p}{100}\right)=$
 $K\left(1+(m+n).\frac{(4k^2+9k-2).p}{100}\right)$, откъдето $(m-n)(4k^2+9k-3)=0$. Лесно се
 проверява, че в разглеждания интервал за k е изпълнено $4k^2+9k-3>0$,
 откъдето заключаваме, че $m-n=0$, т.е. $\frac{m}{n}=1$.

250

„поне един от тримата студенти е научил изтегления въпрос“. Противоположното му събитие $\bar{A}$ е „нико един от тримата студенти не е научил изтегления въпрос“, като $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Тъй като $P(\bar{A}) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} = \frac{27}{64}$, то търсената вероятност $P(A) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$.

Задача 7. Първи начин. Нека P_1 е ортогоналната проекция на точка P върху равнината $(ABCD)$. Тогава $PP_1 \perp (ABCD)$, P_1N е ортогоналната проекция на отсечката PN върху $(ABCD)$, P_1 е среда на ръба CD , като $P_1N \perp MN$. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $PN \perp MN$, т.е. $\cos \angle MNP = 0$.

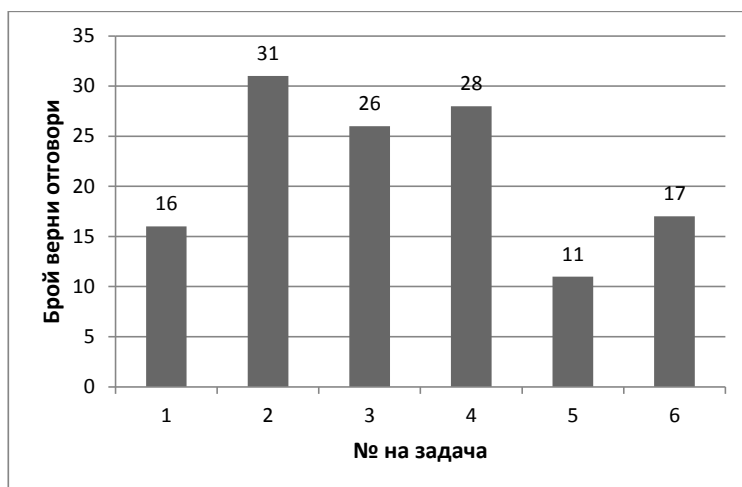


Втори начин. Нека ръбът на куба има дължина a . Тогава $MP = a\sqrt{2}$, $MN = P_1N = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а от правоъгълния $\triangle NP_1P$: $NP = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. За триъгълник $\triangle MNP$ прилагаме косинусова теорема: $\cos \angle MNP = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2MN \cdot NP} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} - 2a^2}{a^2\sqrt{3}} = 0$.

Анализ на постигнатите резултати

На първо място сред единадесетокласниците се класира Милка Росенова от ПМГ „Васил Левски“ – Смолян, с 22 точки. Второ място си поделиха Димитър Карев от ПМГ „Акад. Боян Петканчин“ – Хасково, и Марио Илиев от ПМГ „Иван Вазов“ – Димитровград, с 20 точки, а трето място зае Димитър Николов от „Акад. Боян Петканчин“ – Хасково, с 19 точки. От всички 66 участници 9 са събрали 50% и повече от максималния брой точки, а 5 имат 0 точки.

На фиг. 1 е показано представянето на участниците (брой верни отговори) по задачи от 1 до 6.

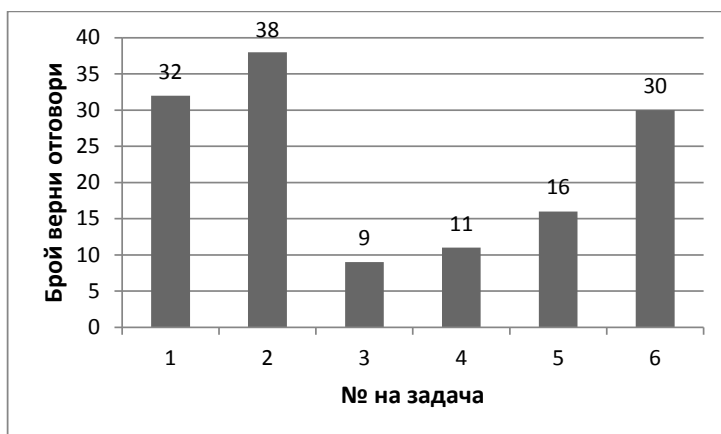


Фигура 1

Анализът показва, че 24,24% от участниците са решили вярно първа задача, 46,97% – втора задача, 39,39% – трета задача, 42,42% – четвърта задача, 16,67% – пета задача, и 25,76% – шеста задача. Успеваемостта за седма задача е 7,58%, а общият брой събрани точки от всички задачи е 428 от общо 1518 възможни, което означава 28,19% успеваемост върху темата на всички участници.

На първо място сред дванадесетокласниците се класира Георги Базлянков от ГПЧЕ „Христо Ботев“ – Кърджали, с пълен брой точки – 23. Второ и трето място заеха съответно Христо Райдовски от ПМГ „Васил Левски“ – Смолян, с 18 точки и Ангел Беширов от същото училище със 17 точки. От всички 78 участници 9 са събрали 50% и повече от максималния брой точки, а 8 имат 0 точки.

На фиг. 2 е показано представянето на участниците (брой верни отговори) по задачи от 1 до 6.



Фигура 2

Анализът показва, че 41,03% от участниците са решили вярно първа задача, 48,72% – втора задача, 11,54% – трета задача, 14,1% – четвърта задача, 20,51% – пета задача, и 38,46% – шеста задача. Успеваемостта за седма задача е 8,97%, а общият брой събрани точки от всички задачи е 485 от общо 1794 възможни, което означава 27,03% обща успеваемост.

Изводите, които могат да се направят на база тези резултати, са няколко.

Очаквано успеваемостта при последната задача е най-малка както в XI, така и в XII клас. Това според нас се дължи не толкова на самите условия, а на факта, че участниците нямат ориентация за отговор за разлика от останалите задачи.

Сред тестовите задачи от затворен тип най-слабо сред единадесетокласниците е представянето на пета задача. Въпреки че тя е „стандартна“ като тип, най-вероятно слабото представяне се дължи на „нетрадиционния“ вид на трапеца. Дванадесетокласниците са се затруднили най-много с трета и четвърта задача, което свидетелства за недостатъчна подготовка върху геометрични задачи и върху задачи, невлизаци в задължителната подготовка.

Учудващ е фактът, че на задача 1 от темата за XI клас, която може да се реши дори само на база предложените отговори, верен отговор са посочили едва 24% от участниците, като в същото време е силно представянето на задачи 2 и 3.

Като цяло, успеваемостта е значително под 50% и в двата класа, причина за което може да се търси както в самите теми, така и в нивото на подготовка на участниците в математическия турнир.

NOTES / БЕЛЕЖКИ

1. Задача 4 от темата за XII клас, както и представеното в настоящата статия решение, са предложени от проф. д.п.н. Сава Гроздев.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & S. Doychev (2011). *Matematicheski testove. VIII – XII klas*. Sofia: Regalia 6, (ISBN 978-954-745-212-1), 132stranitsi [Гроздев, С. & С. Дойчев (2011). *Математически тестове. VIII – XII клас*. София: Регалия 6, (ISBN 978-954-745-212-1), 132страници]
- Grozdev, S.&H. Lesov (2012). *Zimni matematicheski sastezaniya*. Sofia: VUZF. (ISBN 978-954-8590-17-4), 351 stranitsi. [Гроздев, С.&Х. Лесов (2012). *Зимни математически състезания*. София: ВУЗФ. (ISBN 978-954-8590-17-4), 351 страници.]
- Grozdev, S., V.Nenkov & S. Doychev (nauchnaredaktsia) (2012). *Za visoki postizheniya v matematikata (v pomoshht na uchitelya)*. Sofia: Fondatsii “M. Balkanski” i “Amerika za Balaria”. (ISBN 978-954-92830-3-7), 204 stranitsi. [Гроздев, С., В. Ненков & С. Дойчев (научна редакция) (2012). *За високи постижения в математиката (в помощ на учителя)*. София: Фондации „М. Балкански“ и „Америка за България“. (ISBN 978-954-92830-3-7), 204 страници.]
- Grozdev, S. &V. Nenkov (2015). *Zadachite na Ru. Peta knizhka XI – XII. klas*. Sofia: Arhimed. (ISBN-978-954-779-1879), 130 stranitsi. [Гроздев, С. &В. Ненков (2015). *Задачите на Ру. Пета книжка XI – XII клас*. София: Архимед. (ISBN-978-954-779-1879), 130 страници.]

ANALYSIS OF THE PROBLEMS AND PERFORMANCE OF THE STUDENTS FROM 11TH AND 12TH GRADES IN THE REGIONAL MATHEMATICS TOURNAMENT KARDZHALI’ 2015

Abstract. This article discusses the tasks for the 11th and 12th grades in the Regional Mathematics Tournament in Kardzhali, held on 14.11.2015. Methodical approaches to the solutions are proposed. Accounting for the results the authors analyze the level of preparation of participants in events of a similar type.

✉ ¹⁾ **Dr. Rosen Nikolaev, Assoc. Prof.,**
✉ ²⁾ **Dr. Jordan Petkov, Assist. Prof.**

University of Economics
77, Kniaz Boris I Blvd.
9002 Varna, Bulgaria

¹⁾ E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg,

²⁾ E-mail: jr_petkov@ue-varna.bg