

АНАЛИЗ НА ДВЕ ЗАДАЧИ ОТ МЕЖДУНАРОДНАТА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Сава Гроздев

Резюме. Успешното решаване на първите две задачи от темата на Международната олимпиада по математика през 2012 г. е било достатъчно за получаване на бронзов медал. Статията е посветена на тяхното анализиране. Останалите задачи са представени с условията им.

Keywords: Olympiad, problem solving, orthocenter, derivative.

Петдесет и третата международна олимпиада по математика се проведе от 7 до 16 юли 2012 г. в Аржентина. Шестимата български ученици спечелиха общо 1 златен, 2 сребърни и 2 бронзови медала, а в отборното класиране България раздели 19–21 място с Бразилия и Украйна. Ето условията на шестте задачи, върху които се състезаваха 548 представители на 100 държави.

Задача 1. Центърът на външновписаната окръжност спрямо страната BC на даден $\triangle ABC$ е означен с I . Окръжността се допира до правите AB , BC и AC съответно в точки K , M и L . Правите ML и BI се пресичат в точка F , а правите MK и CI – съответно в точка G . Ако S и T са пресечните точки на BC съответно с AF и AG , да се докаже, че M е средата на отсечката ST .

(предложена от Евангелос Психас, Гърция)

Задача 2. Нека $n \geq 3$ е цяло число и $a_2, a_3, \dots, a_n$ са такива положителни реални числа, че $a_2 a_3 \dots a_n = 1$. Да се докаже, че $(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > n^n$.

(предложена от Анжело ди Паскуале, Австралия)

Задача 3. *Отгатване* е игра между двама играчи A и B . Правилата на играта зависят от две естествени числа k и n , които са известни и на двамата. Отначало A избира цели числа x и N , за които $1 \leq x \leq N$, като пази в тайна x , а на B съобщава само N . Играч B се опитва да получи информация за x , задавайки въпроси на A по следния начин: B избира множество от естествени числа S за всеки свой въпрос и пита A дали $x \in S$ (не е задължително всеки път S да е различно). Броят на въпросите на B е неограничен, но краен. Играч A отгоняра с *да* или *не*, но не е задължен да казва истината. Единственото условие е измежду всеки $k + 1$ последователни отговори на A поне един да е верен. След като B завърши със задаването на въпроси, той трябва да определи множество X с най-много n естествени числа. Ако $x \in X$, то B е победител. В противен случай той губи играта. Да се докаже, че

- 1). Ако $n \geq 2^k$, то B има печеливша стратегия.
- 2). За всяко достатъчно голямо k съществува $n \geq 1,99^k$ така, че B не може да си гарантира победа.

(предложена от Дейвид Артур, Канада)

Задача 4. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ така, че за произволни цели числа a, b и c , за които $a + b + c = 0$, е изпълнено равенството

$$f^2(a) + f^2(b) + f^2(c) = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ е множеството на целите числа.)

(предложена от Лайъм Бейкър, Южна Африка)

Задача 5. Даден е правоъгълен триъгълник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). $C D$ е означена петата на височината от върха C . Нека X е точка от вътрешността на отсечката CD . Точката K от отсечката AX е такава, че $BK = BC$, а точката L от отсечката BX е такава, че $AL = AC$. Ако M е пресечната точка на AL и BK , да се докаже, че $MK = ML$.

(предложена от Джозеф Ткадлец, Чехия)

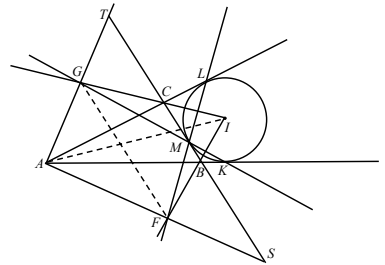
Задача 6. Да се намерят всички естествени числа n , за които съществуват неотрицателни цели числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ така, че

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

(предложена от Душан Джукич, Сърбия)

Първите две задачи се оказаха достатъчни за завоюване на мезал по време на олимпиадата. Предлагаме ви решения на тези задачи.

Първо решение на задача 1: Тъй като $IF \perp GK$ и $IG \perp FL$, то M е ортоцентър на $\triangle GFI$. Оттук следва, че $\angle IFL = \angle IGK$ и значи точките F, G, I, K и L лежат на една окръжност. От друга страна $IL \perp AL$ и $IK \perp AK$, което означава, че точката A лежи на същата окръжност. В частност имаме, че $IF \perp AS$ и $IG \perp AT$. От друга страна BF и CG са ъглополовящи съответно на $\angle ABS$ и $\angle ACT$. Получаваме, че триъгълниците ABS и ACT са равнобедрени, т.е. $AB = SB$ и $AC = TC$. Но тогава $AK = AB + BK = SB + BM = SM$ (тъй като $BK = BM$) и $AL = AC + CL = TC + CM = TM$ (тъй като $CL = CM$). Сега е достатъчно да забележим, че $AK = AL$. Заклучаваме, че $SM = TM$, т.е. M е средата на отсечката ST .



Второ решение на задача 1: От теоремата на Менелай за $\triangle ABT$ и правата GM имаме $\frac{AG}{GT} \cdot \frac{TM}{MB} \cdot \frac{BK}{AK} = 1$, а от теоремата на Менелай за $\triangle ASC$ и правата FM – съответно $\frac{AF}{FS} \cdot \frac{SM}{MC} \cdot \frac{CL}{LA} = 1$. Тогава $\frac{AG}{GT} \cdot \frac{TM}{MB} \cdot \frac{BK}{AK} = \frac{AF}{FS} \cdot \frac{SM}{MC} \cdot \frac{CL}{LA}$ и като вземем предвид, че $BK = BM$, $CM = CL$ и $AK = AL$ след съкращаване получаваме $\frac{AG}{GT} \cdot TM = \frac{AF}{FS} \cdot SM$. Оттук следва, че равенството $TM = SM$ е еквивалентно с $\frac{AG}{GT} = \frac{AF}{FS}$, т.е. с успоредността $FG \parallel BC$. Но в първото решение доказахме, че M е ортоцентър на $\triangle GFI$, откъдето заключаваме, че $IM \perp FG$ и понеже $IM \perp BC$, то наистина $FG \parallel BC$.

Решение на задача 2: Ще докажем неравенството $(a_k + 1)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \cdot a_k$ за всяко $k = 2, 3, \dots, n$. Вместо a_k да разгледаме произволно реално $x \geq 0$. Тогава неравенството става $(x+1)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \cdot x$ и при фиксирано k дясната част е линейна функция, чиято графика (права линия) минава през началото на координатната система. Ако $f(x) = (x+1)^k$, то въпросът се свежда до намиране на права линия $y = ax$ така, че $f(x) \geq ax$. В случай, че съществува $x_0 > 0$, за което $f(x_0) = ax_0$, то правата $y = ax$ е допирателна към графиката на $f(x)$ в точката x_0 . Ще потърсим a именно с такова свойство. Имаме $a = f'(x_0) = k(x_0 + 1)^{k-1}$.

Оттук $x_0 = \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} - 1$ и като заместим в условието $f(x_0) = ax_0$ (което означава, че точката на допиране е с абсциса x_0), намираме $\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{k}{k-1}} = a \left(\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} - 1\right)$.

Последното е еквивалентно с $\frac{a}{k} \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} = a \left(\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} - 1\right)$ и оттук $\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1$,

т.е. $a^{\frac{1}{k-1}} = \frac{k}{k-1}$ и следователно $a = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$. Получихме, че $f(x) \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} x$

за всяко $x \geq 0$ и сега е достатъчно да приложим това неравенство последователно за $x = a_2, a_3, \dots, a_n$. Като умножим всичките $n-1$ на брой неравенства, получаваме $\prod_{k=2}^n (a_k + 1)^k \geq n^n a_2 a_3 \dots a_n = n^n$. Равенство би могло да се достигне единствено в случай, че $a_k = \frac{1}{k-1}$ за всяко $k = 2, 3, \dots, n$, което е невъзможно, защото тогава се нарушава условието $a_2 a_3 \dots a_n = 1$.

✉ **Сава Гроздев**

професор, доктор по математика, доктор на педагогическите науки
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев”, бл. 8
1113 София, България
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

ANALYSIS OF TWO PROBLEMS FROM THE INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sava Grozdev

Abstract. Successful solutions of the first two problems from the paper of the International Mathematical Olympiad in 2012 were enough for a bronze medal. The paper is dedicated to the analysis of these problems. The other problems are stated only.

✉ **Sava Grozdev**

Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: sava.grozdev@gmail.com